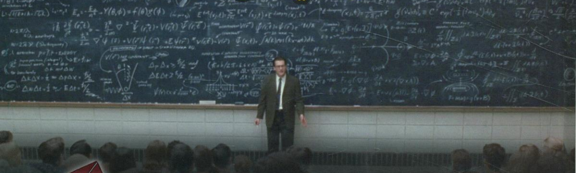
الرياضيات

- التشاكل والتماثل
- المثاليات الأولية والعظمى
- معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية
- المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال
- نظرية رول - نظرية التزايدات المحدودة - الأوضاع غير المعينة
- طرق إيجاد مقدرات النقطة
- التكامل المعتل



خلود علي حسن سلامة

www.darsafa.net

الرياضيات

- التشاكل والتماثل
- المثاليات الأولية والعظمى
- معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية
- المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال
- نظرية رول - نظرية التزايدات المحدودة - الأوضاع غير المعينة
- طرق إيجاد مقدرات النقطة
- التكامل المعتل

9789957247072

دار صفاء للطباعة والنشر والتوزيع

المملكة الأردنية الهاشمية - عمّان - شارع الملك حسين
مجمع الفحيص التجاري - هاتف : 4611169 6 962+
تلفاكس: 4612190 6 962+ ص.ب 922762 عمّان 11192 الأردن
E-mail: safa@darsafa.net www.darsafa.net

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَقُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ۖ وَسَتُرَدُّونَ إِلَىٰ عَالِمِ الْغَيْبِ وَالشَّهَادَةِ فَيُنَبِّئُكُم بِمَا كُنتُمْ تَعْمَلُونَ ﴾

صدق الله العظيم

الرياضيات

الرياضيات

- التشاكل والتماثل
- المثاليات الأولية والعظمى
- معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية
- المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال
- نظرية رول - نظرية التزايدات المحدودة - الأوضاع غير المعينة
- طرق ايجاد مقدرات النقطة
- التكامل المعتل

خلود علي حسن سلامة

الطبعة الأولى
2014م - 1435هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (318/ 1/ 2011)

510

سلامة، خلود علي حسن
الرياضيات: التشاكل والتماثل/ خلود علي حسن سلامة. ـ عمان: دار صفاء للنشر والتوزيع، 2011.
( ) ص
ر.أ: 2011/1/318
الواصفات: الرياضيات

❖ يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية أو أي جهة حكومة أخرى

الطبعة الأولى

2014م – 1435هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان ـ شارع الملك حسين ـ مجمع الفحيص التجاري ـتلفاكس 4612190 6 962+
هاتف: 4611169 6 962+ ص.ب 922762 عمان ـ 11192 الاردن

DAR SAFA Publishing - Distributing
Telefax: +962 6 4612190- Tel: + 962 6 4611169
P.O.Box: 922762 Amman 11192- Jordan
http://www.darsafa.net
E-mail:safa@darsafa.net

ISBN 978-9957-24-707-2 ردمك

الفهرس

الفصل الأول

التشاكل والتماثل

Homomorphism and Isomorphism

الفصل الأول

التشاكل والتماثل

Homomorphism and Isomorphism

ستتناول بالدراسة لنوعين من الدوال بين زمرتين إحداهما تسمى تشاكل وهي دالة تحافظ على التركيب الداخلي للزمرة، أما النوع الثاني فهو ما يسمى بالتماثل.

التشاكل Homomorphism :

تعريف: بفرض أن (ك، *) و(كَ، o) زمرتان، يقال أن الدالة φ: ك ← كَ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (كَ، o) إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

φ(أ * ب) = φ(أ) o φ(ب) ، $\forall$ أ، ب $\in$ ك

نلحظ أن أ * ب هو ارتباط العنصرين أ، ب وفقا للعملية الثنائية * المعرفة على ك، أما φ(أ) o φ(ب) فهو ارتباط العنصرين φ(أ)، φ(ب) وفقاً للعملية الثنائية o المعرفة على كَ، وليس الضرورة أن تكون o هي *. وعلى ذلك فإن التشاكل هو دالة تحقق أن صورة الارتباطات تساوي ارتباطات الصور.

مثال:

نفرض أن (ك، *)، (كَ، o) زمرتان معرفتان بالجدولين الآتيين، حيث ك = {أ، ب، جـ} كَ = {س، ص، ع}، ق: ك ← كَ معرف كما يلي:

ق(أ) = س، ق (ب) = ع ، ق(جـ) = ص

*	أ	ب	جـ
أ	أ	ب	جـ
ب	ب	جـ	أ
جـ	جـ	أ	ب

o	س	ص	ع
س	س	ص	ع
ص	ص	ع	س
ع	ع	س	ص

نلحظ الآتي:

ق(أ*ب) = ق(ب) = ع = ق (أ) o ق (ب)

ق(ب*أ)= ق(ب) = ع = ق (ب) o ق (أ)

ق(ب * جـ) = ق(أ) = س = ق(ب) o ق(جـ)

ق(جـ * ب) = ق(أ) = س = ق(جـ) o ق(ب)

ق(أ *جـ) = ق(جـ) = ص = ق(أ) o ق(جـ)

ق(جـ * أ) = ق(جـ) = ص = ق(أ) o ق(جـ)

∴ ق تشاكل أو هو مومور قزم من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (كَ، o).

مثال:

بفرض أن (ك، *)، (كَ، o) زمرتان، وأن هـَ هو محايد العملية الثنائية o، وأن ق: ك ← كَ معرف كما يلي:

ق(أ) = هـَ ∀أ∈ك

هذه الدالة تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (كَ، o) لأن

$\forall$ أ، ب $\in$ك، ق(أ * ب) = هـَ = هـَ o هـَ = ق(أ) o ق(ب)

يسمى هذا التشاكل بالتشاكل البديهي (trivial homomorphism)، وتعد هذه الدالة هي الدالة الثابتة الوحيدة التي تحقق شرط التشاكل.

مثال:

نعلم ان النظام الجبري (ت، .) زمرة، حيث .، ت = {م^{ن}: ن $\in$ص} هي عملية الضرب، الدالة φ: (ص، +) $\to$ (ت، .). والمعرفة بالصيغة التالية: φ(ن) = ٢^{ن}، $\forall$ ن $\in$ ص هي تشاكل من الزمرة (ص، +) إلى الزمرة (ت، .) حيث:

$\forall$ ن، م $\in$ ص، φ (ن + م) = ٢ $^{ن+م}$ = ٢^{ن} . ٢^{م} = φ(ن) . φ (م).

مثال:

تعرف الدالة φ من الزمرة (ص، +) إلى زمرة الأعداد الصحيحة (ص$_{ن}$، +$_{ن}$) بمعيار ن كما يلي:

φ (أ) = [أ]، $\forall$ أ $\in$ ص

هذه الدالة تشاكل حيث: $\forall$ أ ، ب $\in$ ص، φ (أ + ب) = [أ + ب]

= [أ] + [ب]$_{ن}$ = φ(أ) + $\varphi_{ن}$(ب)

مثال:

بفرض أن φ: (ح+، .) $\to$ (ح .+) دالة معرفة كما يلي:

φ(س) = لوس، $\forall$ س $\in$ ح$^{+}$

هذه الدالة تشاكل من الزمرة (ح+،.) إلى الزمرة (ح، +) لأن φ(س.ص) = لو(س . ص) = لوس + لو ص = φ (س) + φ (ص).

نظرية(١) بفرض أن φ : (ك، $*$) ← (كَ، o) تشاكل من الزمرة (ك، $*$) إلى الزمرة (كَ، o) فإن: (أ) φ (هـ) = هـَ.

حيث هـ هو محايد العملية الثنائية هـَ $*$ محايد العملية الثنائية o.

(بب) φ (ل$^{-1}$) = (φ (ل))$^{-1}$، $\forall$ ل $\in$ ك.

البرهان:

(أ) φ (أ) = φ (أ $*$ هـ) = φ (أ) . φ (هـ)............................ (١)

وكذلك φ (أ) = φ (أ) o هـَ، .... (٢)

من (١)، (٢) نحصل على φ (أ) o φ (هـ) = φ (أ) o هـَ

ولكن الزمرة تحقق قوانين الحذف ∴ φ (هـ) = هـَ

(بب) $\forall$ل$\in$ك ل$*$ل$^{-1}$ ل$^{-1}$$*$ل = هـ

∴ هـَ= φ(هـ) = φ(ل $*$ ل$^{-1}$) = φ(ل) o φ(ل$^{-1}$)...................... (١)

وكذلك

هـَ = φ(هـ)= φ(ل$^{-1}$$*$ ل) = φ(ل$^{-1}$) o φ(ل) .... (٢)

من (١)، (٢) نحصل على φ(ل$^{-1}$) = (φ(ل))$^{-1}$ ، $\forall$ل$\in$ك

تعريف: بفرض أن φ تشاكل من الزمرة (ك، $*$) إلى الزمرة (كَ، o)، فإن المجموعة الجزئية φ (ك) من كَ تسمى مدى φ (Rauge φ) وتعرف كما يلي:

مدى φ = {φ (ل): ل $\in$ ك} $\subseteq$ كَ.

كما تسمى المجموعة φ-١ (هـَ) = {ل $\in$ ك: φ (ل) = هـَ} $\subseteq$ك. بنواة التشاكل φ ويرمز لها بالرمز تشاكل φ.

نظرية(٢): بفرض أن φ تشاكل من الزمرة (ك، $*$) إلى الزمرة (كَ، o) فإن:

أ) (مدى φ، o) زمرة جزئية من الزمرة (كَ، o).

ب) (تشاكل φ، $*$) زمرة جزئية ناظمية من الزمرة (ك، $*$).

البرهان:

أ) بفرض أن س، ص $\in$ مدى φ، سوف نبين أن س o ص$^{-1}$ $\in$ مدى φ وذلك كما يلي:

$\forall$ س، ص $\in$ مـــدى φ $\Longleftarrow$ E أ، ب $\in$ ك: φ (أ) = س، φ (ب) = ص كما أن ب $\in$ ك $\Longleftarrow$ أ، ب$^{-1}$ $\in$ ك $\Longleftarrow$ أ $*$ ب$^{-1}$ $\in$ ك.

من نظرية (١) نحصل على ص$^{-1}$ = (φ (ب))$^{-1}$ = φ (ب)$^{-1}$.

لأن φ تشاكل

$\therefore$ φ (أ $*$ ب$^{-1}$) = φ (أ) o φ (ب$^{-1}$) = س o ص$^{-1}$

$\therefore$ س o ص$^{-1}$ $\in$ مدى φ

$\therefore$ (مدى φ، o) زمرة جزئية من الزمرة (كَ، o).

ب) نفرض أن ؋، ب ∋ تشاكل φ سوف نبين أن ؋ * ب$^{-1}$ ∋ تشاكل φ أي إثبات أن φ (؋ * ب$^{-1}$) = هـَ وذلك على النحو التالي:

لأن φ تشاكل φ (؋ * ب$^{-1}$) = φ (؋) o φ (ب$^{-1}$)

= هـَ o (φ (ب))$^{-1}$ = هـَ o هـَ = هـَ

∴ (تشاكل φ، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *).

يتبقى إثبات أن (تشاكل φ، *) زمرة جزئية ناظمية، أي اثبات الآتي:

ل$^{-1}$ * ؋ * ل ∋ تشاكل φ، ∀ ؋ ∋ تشاكل φ ، ل ∋ ك

وهذا يتطلب أن يكون φ (ل$^{-1}$ * ؋ * ل) = هـَ والذي يثبت على النحو التالي.

φ (ل$^{-1}$*؋*ل)= φ (ل$^{-1}$) o φ (؋*ل) = φ (ل$^{-1}$) o (φ (؋) o φ (ل))

= φ (ل)$^{-1}$ o (هـَ o φ (ل)) = φ (ل)$^{-1}$ o φ (ل) = هـَ

∴ (تشاكل φ، *) زمرة جزئية ناظمية من الزمرة (ك، *).

نظرية(٣): بفرض أن ق تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى الزمرة (كَ، o) وكانت (م، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *) ، (مَ، o) زمرة جزئية من الزمرة (كَ، o) فإن:

أ) (ق(م)، o) زمرة جزئية من الزمرة (كَ، o).

ب) (ق$^{-1}$(مَ)، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *).

البرهان:

(أ) بفرض أن س، ص ∈ ق(م) سوف نبين أن س o ص${}^{-1}$ ∈ ق(م)، كما يلي:

∀ س،ص ∈ ق(م) ⟸ E أ، ب ∈ م: ق (أ)= س، ق (ب) = ص

وحيث أن ق تشاكل و (م، *) زمرة جزئية فإن:

∀ أ، ب ∈ م ⟸ أ، ب${}^{-1}$ ∈ م ⟸ أ * ب${}^{-1}$ ∈ م،

∴ ق (أ،ب${}^{-1}$) = ق(أ) o ق(ب${}^{-1}$)= ق (أ) o (ق (ب))${}^{-1}$ = س o ص${}^{-1}$ ⟸ س o ص${}^{-1}$ ∈ق(م) وعلى ذلك فإن (ق (م)، o) زمرة جزئية من الزمرة (كَ، o).

(ب) بفرض أن أ، ب ∈ ق${}^{-1}$ (مَ) سوف نبين أن أ، ب${}^{-1}$ ∈ ق${}^{-1}$ (مَ) كما يلي:

∀ أ، ب ∈ ق${}^{-1}$(مَ) ⟸ E س، ص ∈ مَ: ق (أ) = س، ق (ب) = ص وحيث إن ق تشاكل، و (مَ، o) زمرة جزئية، كفإن:

∀ س، ص ∈ مَ ⟸ س، ص${}^{-1}$ ∈ مَ ⟸ س o ص${}^{-1}$ ∈ مَ

وأن ق (أ * ب${}^{-1}$) = ق (أ) o ق (ب${}^{-1}$) = ق (أ) o (ق(ب))${}^{-1}$

= س o ص${}^{-1}$ ∈ مَ

∴ أ * ب${}^{-1}$∈ ق${}^{-1}$ (مَ).

وعلى ذلك فإن (ق${}^{-1}$ (مَ)، *) زمرة جزئية من (ك، *).

التماثل Isomovphism :

تعريف: بفرض أن (ك، ∗)، (كَ، o) زمرتان وأن الدالة ق: ك ← كَ تشاكل وتناظر أحادي (شاملة ومتباينة) فإن ق في هذه الحالة تسمى تماثل، كما يقال إن (ك، ∗) و(كَ، o) زمرتان متماثلتان، ويرمز لذلك بالرمز ك ≃ كَ.

مثال:

نعلم أن (ك، .) زمرة، حيث ك = {١، -١، ي، -ي}، . عملية الضرب العادية، وأن (م، .) زمرة حيث م = {م١، م٢، م٣، م٤}، . هي عملية ضرب المصفوفات.

$$\text{م}_{١}=\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{bmatrix}،\quad \text{م}_{٢}=\begin{bmatrix} ٠ & -١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}،\quad \text{م}_{٣}=\begin{bmatrix} -١ & ٠ \\ ٠ & -١ \end{bmatrix}،\quad \text{م}_{٤}=\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ -١ & ٠ \end{bmatrix}$$

نعرف Ψ : م ← ك كما يلي:

Ψ (م١) = ١ ، Ψ (م٢) = ي، Ψ (م٣) = -١، Ψ (م٤) = -ي

واضح أن Ψ تناظر أحادي وأيضاً تشاكل لأنه يحافظ على العملية فمثلاً:

Ψ (م٢ • م٣) = Ψ (م٤) = -ي

Ψ (م٢) • Ψ (م٣) = ي • (-١) = -ي

∴ Ψ (م٢ • م٣) = Ψ (م٢) • Ψ (م٣)

∴ م ≃ ك ، ومن السهل التأكد عامة من ذلك.

مثال:

*	هـ	أ	ب	جـ
هـ	هـ	أ	ب	جـ
أ	أ	ب	جـ	هـ
ب	ب	جـ	هـ	أ
جـ	جـ	هـ	أ	ب

بفرض أن (ت، *) زمرة معرفة بالجدول الآتـي، حيـث ت = {هـ، أ، ب، جـ} وأن (م، •) هي الزمرة التي عرفـت في المثال السابق وأن Ψ: م $\leftarrow$ ت معرف كما يلي:

Ψ (هـ) = م$_1$ ، Ψ (أ) = م$_2$، Ψ (ب) = م$_3$ ، Ψ (جـ) = م$_4$

إضافة إلى أن Ψ تناظر أحادي فإنه تشاكل، وعلى ذلك فـإن Ψ تماثـل، اي أن

م $\simeq$ ت. من المثالين السابقين يتضح ان ك $\simeq$ م $\simeq$ ت.

مثال:

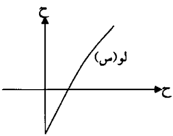
تبين لنا، أن الدالة φ: (ح$^+$، •) $\leftarrow$ (ح، +) هي تشاكل من الزمرة (ح$^+$،•) إلى الزمرة (ح، +)، كمـا أنهـا تنـاظر أحـادي حيـث φ (س$_1$) = φ (س$_2$) $\Longleftarrow$ لو. س$_1$ = لو س$_2$ $\Longleftarrow$ س$_1$ = س$_2$

$\therefore$ أحادي.

وأيضاً $\forall$ ص $\ni$ ح E س $\ni$ ح+ : φ (س) = لو(س) =ص

$\therefore$ φ فوقي (شامل)، وعلى ذلك فإن φ تناظر أحـادي (انظـر رسـم هـذه الدالة)

∴ φ تماثل، أي أن ح+ ≃ ح.



مثال:

برهن أن الزمرتين (ص، +) (ن – {٠}، •} غير متماثلتين.

البرهان:

نفرض العكس، أي نفرض أن الزمرتين (ص، +) ، (ن – {٠}، •} متماثلتان، وهذا يتطلب وجود دالة ق: ص ← ن – {٠} بحيث تكون تشاكل وتناظر أحادي، وهذا يستوجب أن يكون العنصر -١ ∋ ن صورة لعنصر ما في ص وليكن صورة للعنصر س، أي أن ق(س) = –١.

∴ ق (٢س) = ق (س) • ق(س) = (–١) = (–١) • (–١) = ١

ومن حقيقة أن ق (هـ) = هـَ أي ق (٠) =١ بالإضافة إلى فرضية أن الدالة أحادية فإن ذلك يتطلب أن يكون س = ٠، وهذا سوف يقودنا إلى تناقض حيث سيصبح ق(٠) = ١، ق(٠)= –١ وعلى ذلك فإنه لا يمكن تعريف دالة تماثل بين الزمرتين (ص، +)، (ن – {٠}، •) أي أن الزمرتين غير متماثلتين.

نظرية (١):

(أ) كل زمرة دورانية ذات مرتبة منتهية ن متماثلة مع زمرة الأعداد الصحيحة (صن، +ن) معيارن.

(ب) كل زمرة دورانية غير منتهية هي متماثلة مع الزمرة (ص، +).

البرهان:

(أ) نفرض أن (<م>، ✻) زمرة دورانية ذات مرتبة منتهية ن، أي أن:

<م> = {هـ، م، م^٢،....، م^ن-١}

نعرف الراسم ق: <م> ← ص ن والمعرف بالقاعدة التالية: ق (م^جـ) = [جـ]، ∀ م^جـ ∈ <م>.

هذا الراسم أحادي، لأنه إذا كان ق(م^جـ١) = ق(م^جـ٢) ⟸ [جـ١] = [جـ٢].

جـ١ ≡ جـ٢ (mat ن) ⟸ جـ١ = جـ٢ + جـن، جـ ∈ ص.

∴ م^جـ١ = م^جـ٢+جـن = م^جـ٢ • (م^ن)^جـ = م^جـ٢ • (هـ)^جـ = م^جـ٢ • هـ = م^جـ٢

∴ ق أحادي.

أيضا ق فوقي، وبالتالي ق تناظر أحادي إضافة إلى ذلك، فإن ق تشاكل لأن

ق(م^جـ١ ✻ م^جـ٢)= ق(م^جـ٢+جـ٢) = [جـ١ + جـ٢] = [جـ١] +ن [جـ٢].

∴ (<م>، ✻) ≃ (صن، +ن)

(ب) في هذه الحالة تعرف الدالة ق: <م> ← ص كما يلي: ق(م^جـ) = جـ ∀ م^جـ ∈ <م> هذه الدالة تناظر أحادي لأن كل قوى المولد م يجب أن تكون مختلفة وإلا كانت <م> منتهية. كما أن ق تشاكل حيث:

$$ق(\text{أ}^{جـ_1} * \text{أ}^{جـ_2}) = ق(\text{أ}^{(جـ_1+جـ_2)}) = جـ_1 + جـ_2$$

$$= ق(\text{أ}^{جـ_1}) + ق(\text{أ}^{جـ_2})$$

$$\therefore (<\text{أ}>، *) \simeq (ص، +)$$

نظرية (٢):

بفرض أن φ: (ك، $*$) $\leftarrow$ (ل، $\times$) تشاكل من الزمرة (ك، $*$) إلى الزمرة (ل، $\times$)، وأن Ψ : (ل، $\times$) $\leftarrow$ (جـ $\otimes$) تشاكل من الزمرة (ل، $\times$) إلى الزمرة (جـ $\otimes$) أثبت أن ($\Psi \circ \varphi$) = (ك، $*$) $\leftarrow$ (جـ، $\otimes$) هو أيضاً تشاكل.

البرهان:

$\forall$ أ ،ب $\in$ ك $\Longleftarrow$ ($\Psi \circ \varphi$) (أ $*$ب) = Ψ (φ (أ $*$ ب)

لأن φ تشاكل $\quad = \Psi$ (φ (أ) $\times$ φ (ب))

لأن Ψ تشاكل $\quad = \Psi$ (φ (أ)) $\otimes$ Ψ (φ (ب))

= ($\Psi \circ \varphi$) (أ) $\otimes$ ($\Psi \circ \varphi$) (ب)

$\therefore$ $\Psi \circ \varphi$ تشاكل من الزمرة (ك، $*$) إلى الزمرة (جـ، $\otimes$)

ملحوظة:

إن تحصيل التناظر الأحادي هو أيضاً تناظر أحادي، وعلى ذلك فإذا كان كل φ ، Ψ من في النظرية السابقة تماثل فإن:

($\Psi \circ \varphi$) : (ك، $*$) $\leftarrow$ (جـ $\otimes$)

هو أيضاً تماثل، وهذا يوضح لنا أنه إذا كان ك ≃ ل، ل ≃ جـ فإن ك ≃ جـ أي أن علاقة التماثل متعدية (ناقلة)

نظرية (٣):

(أ) علاقة التماثل ≃ عاكسة.

(ب) علاقة التماثل ≃ متماثلة (متناظرة).

البرهان:

(أ) لأي زمرة (ك، ∗) فإن ك ≃ ك وذلك لأن الراسم التطابقي ي هو تناظر أحادي وتشاكل لأن ي (أ ∗ ب) = أ ∗ ب) = ي (أ) ∗ ي(ب)

(ب) إذا كانت الزمرة (ك، ∗) متماثلة مع الزمرة (كَ، o) أي ك ≃ كَ فإننا نرغب في إثبات أن كَ ≃ ك وهذا ما سوف نصل إليه على النحو التالي: حيث ك ≃ كَ إذا يوجد تماثل Ψ: ك ← كَ، وسوف نثبت أن Ψ^{-1}: كَ ← ك هو أيضاً تماثل. نعلم أن معكوس التناظر أحادي هو أيضاً تناظر أحادي، وعليه فإن:

∀ س، ص ∋ كَ E أ، ب ∋ ك: Ψ (أ) = س، Ψ (ب) = ص

∴ Ψ^{-1} (س o ص) = Ψ^{-1} (Ψ (أ) o Ψ (ب))

= Ψ^{-1} Ψ (أ ∗ ب) = أ ∗ ب= Ψ^{-1}(س) ∗ Ψ^{-1} (ص)

∴ Ψ تماثل أي أن كَ ≃ ك. أي أن علاقة التماثل متماثلة.

ملحوظة:

(١) من النظرية والملحوظة السابقتان يتضح لنا أن علاقة التماثل ما هي إلا علاقة تكافؤ.

(٢) مجموعة كل دوال التشاكل من الزمرة (ك، $*$) إلى نفسها تسمى اندومورفزمات (eudomorphisms) ويرمز لها بالرمز مور (ك) أو اندو (ك).

مثال:

الزوج (مور (ك)، o) شبه زمرة مجايد حيث مور (ك) هي مجموعة التشاكلات من الزمرة (ك، $*$) إلى نفسها، o هي عملية تحصيل الدوال.

البرهان:

$\forall$ ق، ع $\in$ مور (ك) $\Longleftarrow$ ق o ع $\in$ مور (ك).

لأن تحصيل التشاكل هو أيضاً تشاكل (نظرية (٢))، كما أن عملية تحصيل الدوال دامجة وأخيراً فإن راسم التطابق هو العنصر المحايد. إذن (مور (ك)، o) شبه زمرة بمحايد.

تمارين

(١) إذا كان φ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى نفسها ومعرفاً بالقاعدة الآتية:
φ (أ) = $أ^{٢}$ ، ∀ أ ∈ ك أثبت أن (ك،*) زمرة إبدالية.

(٢) إذا كانت (ك، *) زمرة، أ ∈ ك عنصراً محددا فأثبت أن الدالة φ: ك ← ك والمعرفة بالقاعدة التالية: φ (س) = أ * س * $أ^{-١}$ ∀ س ∈ ك هي تشاكل.

(٣) بفرض أن (ك، *) زمرة، وأن (م، *) زمرة جزئية ناظمية منها وأن

مَ = {أ * م: م ∈ ك}

(i) أثبت أن (مَ، *) زمرة.

(ii) استخدم الفقرة (i) في إثبات أن φ: ك ← مَ تشاكل حيث:

φ (أ) = أ * م ، ∀ أ ∈ ك

(٤) بفرض أن φ تشاكل من الزمرة (ك، *) إلى نفسها، أثبت أن (ل، *) زمرة جزئية من الزمرة (ك، *) بحيث:

م = {أ ∈ ك: φ (أ) = أ }

(٥) بين أنه إذا كانت (ك، *) زمرة دورانية، وأن (ك، *) ≃ (كَ، o) فإن (كَ، o) أيضاً زمرة دورانية.

الفصل الثاني

المثاليات الأولية والعظمى

الفصل الثاني

المثاليات الأولية والعظمى

سندرس في هذا الفصل المثاليات الأولية والعظمى، ويتم التقيد بالحلقات التبديلية ذات العنصر المحايد.

تعريف: لتكن ح حلقة ول مثالية في ح يقال للمثالية ل أنها مثالية أولية (prime) إذا كانت ل $\neq$ ح ولكل س، ص $\in$ ح حيث س ص $\in$ ل فإن س $\in$ ل أو ص $\in$ ل (أي إذا كان س $\notin$ ل، ص $\notin$ ل فإن س ص $\notin$ ل)

مثال(١):

في الحلقة ص$_{١٢}$ = $\{\bar{٠}, \bar{١}, \bar{٢}, \bar{٣}, \dots, \overline{١٠}, \overline{١١}\}$ تدرس المثاليتين ل$_{١}$ = $\{\bar{٠}, \bar{٤}, \bar{٨}\}$ ول$_{٢}$ = $\{\bar{٠}, \bar{٣}, \bar{٦}, \bar{٩}\}$ ل$_{١}$ ليست مثالية أولية، **لأن** $\bar{٢} \notin$ ل$_{١}$، $\bar{٦} \notin$ ل$_{١}$ ولكن $(\bar{٢}).(\bar{٦}) = \bar{٠} \in$ ل$_{١}$ ل$_{٢}$ مثالية أولية.

مثال (٢):

إذا كان ن عدد أولي فإن ن ص مثالية أولية.

مبرهنة: إذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد وكانت ل مثالية في ح، فإن ح/ل منطقة صحيحة إذا وإذا كانت فقط ل مثالية أولية.

البرهان:

لكل أ، ب ∈ ح إذا كان أ ∉ل، ب ∉ ل، فإن أ + ل ≠ ل و ب + ل ≠ ل في الحلقة ح/ل، بهذا فإن (أ+ل) (ب+ل) ≠ ل أي أن أب + ل ≠ل إذن أب ∉ل أي أن ل مثالية أولية.

العكس:

لنفرض أن ل مثالية أولية في ح. لكل ٠̄≠أ+ل ∈ح/ل ، ٠̄≠ب+ل فإن أ+ل≠ل، ب+ل≠ل. أي أن أ≠ل، ب≠ل. وحيث أن ل مثالية أولية فإن أب∉ل، أي أن أب+ل≠ل ولكن أب + ل = (أ + ل) (ب + ل) بهذا فإن (أ +ل) (ب+ل) ≠ ٠̄ ومن ذلك نستنتج أن 8/ل منطقة صحيحة.

مبرهنة: إذا كانت ح منطقة صحيحة فإن {٠} مثالية أولية

البرهان:

لكل س ≠٠ فإن س ص ≠ ٠ وذلك لأن ح منطقة صحيحة، بهذا فإن س ص ∉ {٠} وهذا يعني أن {٠} مثالية أولية.

مبرهنة: لتكن ح حلقة إذا كانت ل، ع مثاليتين في ح حيث ل ⊂ ع، فإن ع تكون مثالية أولية إذا وإذا كانت فقط ع/ل مثالية أولية في الحلقة ح/ل.

البرهان:

من المبرهنة ما قبل السابقة، ل مثالية أولية إذا وإذا كانت فقط ح/ل منطقة

صحيحة ولكن باستخدام المبرهنة ح/ع $\cong$ $\frac{\text{ح/ل}}{\text{ع/ل}}$.

فإذا كانت ع مثالية أولية فإن $\frac{\text{ح/ل}}{\text{ع/ل}}$ منطقة صحيحة.

ومرة أخرى باستخدام المبرهنة نفسها، يكون لدينا $\frac{\text{ح/ل}}{\text{ع/ل}}$ منطقة صحيحة إذا وإذا كان فقط ع/ل مثالية أولية.

تعريف: لنفرض أن ل مثالية في الحلقة ح.

تسمى المثالية ل بالمثالية العظمى (Maximal Ideal) إذا كانت ل $\neq$ ح وأي مثالية أخرى ع تحوي ل، فإنها إما أن تكون ح أو ل.

أي بمعنى أن ل تكون مثالية عظمى إذا وإذا كانت فقط محتواه في مثاليتين هما ل، ح فقط.

مثال (٣):

في الحلقة ص١٢ = $\{\bar{٠} , \bar{١} , \bar{٢} , \bar{٣} ,\ldots , \bar{١٠} , \bar{١١}\}$ نلاحظ أن ل١=$\{\bar{٠} , \bar{٤} , \bar{٨}\}$ ليست مثالية عظمى لأنها محتواه في المثالية $\{\bar{٠}, \bar{٢}, \bar{٤}, \bar{٦}, \bar{٨}\}$ ولكن المثالية ل٢=$\{\bar{٠} , \bar{٣}, \bar{٦}, \bar{٩}\}$ مثالية عظمى.

مبرهنة: في الحلقة ص، المثالية الرئيسة (ن) تكون مثالية عظمى إذا وإذا كان فقط ن عدد أولي.

البرهان:

بفرض أن (ن) مثالية عظمى في الحلقة ص.

إذا كان العدد ن ليس أوليا، فإن ن = ن$_1$ن$_2$ حيث ١ < ن$_1$ ≤ ن$_2$ < ن ومن ذلك نرى أن المثاليتان (ن$_1$)، (ن$_2$) تكون كالآتي:

(ن) ⊂ (ن$_1$) ⊂ ص　　　　(ن) ⊂ (ن$_2$) ⊂ ص

ولكن هذا يتناقض مع أن (ن) مثالية عظمى. بهذا فإن ن يجب أن يكون عدد أولي.

الاتجاه المعاكس: إذا كانت ن عدد أولي.

نفرض أن (ن) ليست مثالية عظمى من ص ولكن هذا يعني أنه هناك احتمالات

(١) (ن) = ص　　　　أو (٢) توجد مثالية حقيقية (م).

حيث (ن) ⊂ (م) ⊂ ص

الاحتمال الأول غير وارد لأن ١ ليس مضاعف لأي عدد أولي.

بقي الاحتمال الثاني أي أن (ن) ⊂ (م) ولكن هذا يعني أن ن = ك م حيث ك عدد صحيح أكبر من ١.

ولكن هذا يتناقض مع أن ن عدد أولي، بهذا تكون (ن) مثالية عظمى في ص.

> **مبرهنة:** إذا كانت ل مثالية حقيقية حيث ل ≠ {٠}، ل ≠ ح في الحلقة ح فإن مثالية عظمى إذا وإذا كان فقط (ل، أ) = ح لكل أ ∉ ل

هنا (ل، أ) تعبر عن المثالية المتولدة بواسطة المجموعة ل ∪ {أ}.

البرهان:

نلاحظ أن ل ⊂ (ل،م) ⊆ ح، فإذا كانت ل مثالية عظمى، فإن ذلك يعني أن (ل،م) = ح.

الاتجاه المعاكس: إذا كان (ل،م) = ح لكل م ∉ ل.

نفرض أن ع مثالية في ح حيث ل ⊆ ع ⊆ ح.

إذا كانت م أي عنصر في ع حيث م ∉ ل فإن ل ⊆ (ل،م) ⊆ ع ⊆ ح، ولكن (ل،م) = ح، بهذا فإن ع = ح، أي أن ل مثالية عظمى.

المبرهنة القادمة من النتائج المهمة التي تحدد وجود المثاليات العظمى، ولكن في برهان هذه المبرهنة نحتاج لتمهيد زورن (Zern's Lemma) حيث أن هذا التمهيد من ضمن مجموعة المبادئ المسلمات المتكافئة التي تستعمل في مجالات متعددة في الرياضيات، حيث تسهل براهين العديد من المشكلات في مختلف الفروع وقد لا يكون ذلك صريحاً في بعض الأحيان على القارئ الراغب في معرفة المزيد عن هذه المبادئ الإطلاع على مراجع أخرى تهتم بدراسة هذه المبادئ والمسلمات.

تمهيد زورن (Zern's Lemma)

إذا كانت أ مجموعة غير خالية ومرتبة ترتيباً جزئياً (Partially ordered) وكان لكل مجموعة جزئية ومرتبة ترتيباً خطياً (chain) م من أ لها حد أعلى من أ، فإن أ يكون لها عنصر أعظمي.

مبرهنة: إذا كانت الحلقة ح متولدة بواسطة مجموعة منتهية من العناصر، أي أن ح = < $ا_1$، $ا_2$، ....، $ا_ن$ >، فإن أي مثالية حقيقية تكون محتواه في مثالية عظمى

البرهان:

نفرض أن ل أي مثالية حقيقية في ح، إذا كانت أ عائلة من المثاليات الحقيقة التي تحتوي ل أي أن أ = {ع: ل ≤ ع، ع ≠ {٠}، ح} نلاحظ أن هذه العائلة غير خالية لأن ل ∈ أ.

إذا كانت {$ل_ي$} أي مجموعة جزئية مرتبة ترتيباً خطياً من أ.

فالهدف الآن هو إثبات أن $\cup ل_ي$ عنصر في أ.

للوصول إلى الهدف نفرض أن ا، ب ∈ $ع_ي$، ر ∈ ح

هذا يعني أنه توجد $ل_ي$، $ل_ن$ بحيث ا ∈ $ل_ي$، ب ∈ $ل_ن$، وحيث أن {$ل_ي$} مرتب ترتيب خطيا، فإنه إما أن تكون $ل_ي \subseteq ل_ن$ أو $ل_ن \subseteq ل_ي$.

هذا يعني أن ا، ب ∈ $ل_ي$ أو ا،ب ∈ $ل_ن$ وحيث أن كليهما مثالية في ح فإن:

ار، ا- ب ∈ $ل_ن \subseteq \cup ل_ي$ أو ار، ا-ب ∈ $ل_ي \subseteq \cup ل_ي$

وهذا يثبت أن $\cup ص_ي$ مثالية.

بقي إثبات $\cup ص_ي$ مثالية حقيقية في ح.

نفرض أن $\cup ص_ي$ = ح، وحيث أن ح متولدة بواسطة المجموعة

{ $ا_1, ا_2, \ldots, ا_ن$} هذا يعني أنه لكل مولد $ا_ج$ توجد مثالية $ل_{ي_ج}$ من {$ل_ي$} حيث $ا_ج \in ل_{ي_ج}$ وحيث أنه يوجد عدد محدود والمجموعة {$ل_ي$} مرتبة ترتيباً خطيا وبذلك توجد مثالية تحتوى كل هذه المولدات $ل_{ي_ي}$، أي أن $ل_{ي_ي} =$ ح ولكن هذا تناقض.

إذن $\cup$ $ل_ي \neq$ ح أي أن $\cup$ $ل_ي$ مثالية حقيقية وكذلك نلاحظ أن $ل \subseteq \cup$ $ل_ي$ إذن $\cup$ $ل_ي \in$ أ.

إذن باستخدام تمهيد زورن يكون للعائلة أ مثالية عظمى، بهذا يكون البرهان قد اكتمل.

نتيجة: العنصر ا في الحلقة التبديلية ذات العنصر المحايد يكون قابل للعكس إذا وإذا كان فقط لا ينتمي إلى أي مثالية عظمى.

مبرهنة: الحلقة ح التي بها مثالية عظمى واحدة فقط تحتوي على العناصر إلى مدة ١ , ٠ فقط.

البرهان:

نفرض أنه يوجد عنصر جامد ا حيث ا $\neq$ ١ , ٠.

من العلاقة $ا^٢ =$ ا نحصل على ا (١-ا) = ٠، ولهذا فإن كل من ا، ١-ا قواسم للصفر وعلمنا أن العنصرين ا، ١-ا غير قابلين للعكس. ولكن هذا يعني أن كل من المثاليات التالية (ا)، (١-ا) تكون مثاليات حقيقية في ح، بهذا فإن م تحوي المثاليتين السابقتين حيث م مثالية عظمى في ح، وبناء على ذلك فإن كل من ا،

١- ؟ ∌ م.

إذن ١ = ؟ + (١ − ؟) ∈ م

بهذا فإن م = ح ولكن هذا يتناقض مع أن م مثالية عظمى.

أي لا يوجد عنصر جامد في الحلقة ح عدا ٠ , ١.

تعريف: الجذر اليعقوبي (Jacobsion radical) ويرمز له بالرمز جذر (ح) ويعرفه كالآتي جذر(ح) = $\bigcap_{\text{م مثالية عظمى}}$ م

ملاحظة: إذا كانت ح لها مثالية واحدة عظمى م فإن جذر(ح) = م وتسمى الحلقة في هذه الحالة بالحلقة المحلية (local ring).

مبرهنة: إذا ر∈ ح، فإن ر∈ جذر(ح) إذا وإذا كان فقط ١-ر؟ قابل للعكس لكل ؟ ∈ ح

البرهان:

بفرض أن ر ∈ جذر(ح). إذن لكل مثالية عظمى م فإن ر؟ ∈ م لكل ؟∈ح. نلاحظ أن ١- ر؟ ∉ م، لأنه إذا كان ١- ر؟ ∈ م فإن ١= ر+ (١- ؟) ∈م

أي أن م = ح ولكن هذا يتناقض مع أن م مثالية عظمى. بهذا فإن ١- ر ؟ لا ينتمي إلى أي مثالية عظمى، وباستخدام النتيجة السابقة فإن ١ - ر؟ يكون قابل للعكس.

الاتجاه المعاكس: إذا كان ١- ؟ر عنصر قابل للعكس لكل ؟ ∈ ح.

نحاول إثبات أن ر ∈ جدر(ح).

نفرض أن ر ∉ جدر (ح) هذا يعني أنه توجد مثالية عظمى م حيث ر∈ م.

أي أن م ⊊ م + حر ⊆ ح

ولكن م مثالية عظمى، وهذا يعني أن م + حر = ح

إذن ١ ∈ م + ح ر، عليه فإنه يمكن ايجاد أ∈ح، ب∈م حيث

١= ب + أر   أي أن   ١- أر = ب ∈ م

ومن المعطيات ١- أر عنصر له معكوس.

إذن باستخدام النتيجة (١) نحصل على تناقض، ولهذا فإن ر ∈جدر (ح).

مبرهنة: إذا كانت ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، فكل مثالية عظمى تكون أولية.

البرهان:

بفرض أن م مثالية عظمى، فإذا كان س، ص ∈ ح حيث س ص ∈ م، فإذا كان س ∉ م. فإن م + ح س مثالية تحتوي على م أي أن

م ⊂ م + ح س ⊆ ح

وحيث أن م مثالية عظمى، فإن م + ح س = ح.

اذن ١ = ب + ر س ∈ م + ح س أي أن ١∈ م + ح س

ولذلك فإن ١ = ب + رس حيث ب∈ م، ر∈ح، بضرب الطرفين في ص

نحصل على ص = ص ب + رس ص ولكن رس ص∋ م لأن م مثالية، س ص∋م وكذلك ص ب∋ م إذن ص ∋ م

وهذا يثبت ان م مثالية أولية.

ملاحظة: عكس المبرهنة السابقة غير صحيح في الحالة العامة والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال (٤):

ح = ص × ص حلقة تبديلية ذات عنصر محايد.

نلاحظ أن ص × {٠} مثالية أولية في الحلقة ح ولكنها ليست مثالية عظمى، وذلك لأن ص + ٢ ص ≠ ح.

مثالية في ح حيث ص × {٠} ⊂ ص × ٢ ص ⊂ ح

وعلى الرغم من ذلك ففي بعض الحالات الخاصة يكون العكس صحيح ولتوضيح ذلك نحتاج إلى المفاهيم الآتية:

لتكن ح حلقة تبديلية ذات عنصر محايد، إذا كانت جميع مثاليات الحلقة ح رئيسة، فيقال أن ح حلقة المثاليات الرئيسية.

وإذا كانت ح بالإضافة إلى ذلك منطقة صحيحة، يقال في هذه الحالة على ح أنها المنطقة الصحيحة للمثاليات الرئيسة (principal ideal domain).

مبرهنة: إذا كان ح منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة، فإن كل مثالية أولية ل في الحلقة ح بحيث ل ≠ {٠} تكون مثالية عظمى في الحلقة ح.

البرهان:

لتكن ل مثالية أولية في ح بحيث أن ل $\neq$ {٠}

بفرض أن ع أي مثالية أخرى في ح بحيث ل $\subseteq$ ع.

بما أن ح هي حلقة المثاليات الرئيسة فإنه يوجد س، ص $\in$ ح بحيث ل = (س)، ع = (ص). نلاحظ أن س = س.١ $\in$ (س) = ل $\subseteq$ ع = (ص).

إذن س = رص لبعض ر $\in$ ح.

من المعطيات ل مثالية أولية، فهذا يؤدي إلى احتمالين ص$\in$ ل أو ر$\in$ل.

الاحتمال الأول يقودنا مباشرة إلى تناقض (ع $\subseteq$ ل).

وبهذا بقي الاحتمال الثاني أي ر$\in$ ل ولكن هذا يعني أن ر = م س لبعض م$\in$ ح. إذن ر = م ر ص وحيث أن ح تبديلية فإن ر = ر م ص

هنا قانون الحذف متحقق لان ح منطقة صحيحة، فمن العلاقة السابقة نجد أن م ص = ١. وهذا يعني أن ١$\in$ ع، أي أن ع = ح، وبالتالي ل مثالية عظمى في ح.

نتيجة: إذا كانت ل $\neq$ {٠} أي مثالية في الحلقة ص. فإن ل مثالية أولية إذا وإذا كانت فقط مثالية عظمى في ص.

تعريف: إذا كانت ح منطقة صحيحة، فإنه يقال عن العنصر ٠ $\neq$ أ $\in$ ح بأنه قابل للتحصيل (Reducible). إذا وجد عنصرين أ١، أ٢$\in$ح

كليهما غير قابل للعكس بحيث $أ = أ_١ أ_٢$

ويقال أن العنصر $٠ \neq أ \in ح$ غير قابل للتحصيل (Irreducible) إذا كان أ غير قابل للعكس ولا يمكن كتابة على صورة حاصل ضرب عنصرين في ح كليهما غير قابل للعكس.

ملاحظة:

نلاحظ أن كل عنصر قابل للعكس يكون غير قابل للتحليل وذلك لأنه إذا كان $جـ = أ_١ أ_٢$ فإن $جـ^{-١}(أ_١ أ_٢) = ١$ أي أن $(جـ^{-١} أ_١)\ أ_٢ = ١$ وهذا يعني أن $أ_٢$ عنصر قابل للعكس وبهذا فإن جـ يكون غير قابل للتحليل.

مبرهنة: لتكن ح منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة، فالمثالية المولدة بواسطة عنصر غير قابل للتحليل في ح تكون مثالية عظمى في ح.

البرهان:

بفرض أن ن عنصر غير قابل للتحليل في ح، وبهذا فإن ن يكون غير قابل للعكس في ح أي أن $ح \neq (ن)$.

بفرض أن ل أي مثالية في ح حيث $(ن) \subseteq ل$.

بما أن ح منطقة صحيحة للمثاليات الرئيسة فإنه يوجد $س \in ح$ حيث $ل=(س)$.

أي أن $(ن) \subseteq ل = (س)$ وكذلك $ن = ن.١ \in (ن)$ فإن $ن \in (س)$.

أي أن $ن = س د$ لبعض $د \in ح$. ولكن من المعطيات ن غير قابل للتحليل

فإنه إما د قابل للعكس أو س قابل للعكس إذا كان د قابل للعكس فإن س=ن د$^{-1}$ بهذا فإن س∈(ن). أي أن ل = (س) = (ن).

إذا كان س قابل للعكس فإن ١ = س س$^{-1}$ ∈ ل أي أن ل = ح.

أي أن (ن) مثالية عظمى في ح.

ملاحظة:

باستخدام هذه المبرهنة يمكن إعطاء برهان لمبرهنة سابقة وذلك لأن المثالية الأولية المختلفة عن الصفر هي مثالية مولدة بواسطة عنصر أولي (أي عنصر غير قابل للتحليل)، وبذلك تكون مثالية عظمى.

تمارين

١) برهن أنه إذا كانت ن $\neq$ ٠، ١، -١ فإنه يكون عدد أولى إذا وإذا كانت فقط (ن) مثالية اولية من ص.

٢) بفرض أن ح = ص $\oplus$ ص، حيث ص حلقة الأعداد الصحيحة فإن ح مع عمليتي الجمع والضرب المعرفتين كالآتي:

(أ١، ب١) + (أ٢، ب٢) = (أ١ + أ٢، ب١+ب٢).

(أ١،ب١) (أ٢،ب٢) = (أ١أ٢، ب١ب٢).

تكون حلقة هي حلقة الجمع المباشر.

(أ) هل ح منطقة صحيحة؟

(ب) اثبت أن <(١، ٠)> مثالية أولية من ح.

٣) برهن أنه في الحلقة ٢ص المثالية <٤> مثالية عظمى ولكنها ليست أولية.

٤) إذا كانت ل١، ل٢ مثاليتين من الحلقة ح حيث ل١ $\not\supseteq$ ل٢، ل٢ $\supseteq$ ل١ بين أن المثالية ل١ $\cap$ ل٢ ليست أولية.

٥) بفرض أن ح هي حلقة الدوال الحقيقية المستمرة المعرفة على الفترة [٠، ١] اثبت أن م = {ق $\in$ ح: ق $(\frac{1}{2})$: ٠} مثالية عظمى من ح.

٦) لتكن ح حلقة تبديلية فإذا كانت ل، م مثاليتين من ح حيث ل $\supseteq$ م. اثبت أن م تكون مثالية عظمى من ح إذا وإذا كان فقط م/ل مثالية عظمى من الحقة ح/ل.

الفصل الثالث

معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية

الفصل الثالث

معادلات الفروق الخطية ذات الرتبة الثانية

مقدمة:

أعم صيغة لمعادلة الفرق ذات الرتبة الثانية هي:

$\text{ق}(\text{ن}،\ \text{ص}_{\text{ن}}،\ \text{ص}_{\text{ن}+١}،\ \text{ص}_{\text{ن}+٢}) = ٠$ ....(١)

وعلى خلاف المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية، تقبل المعادلة (١) الحل عادة بطريقة التتابع.

المثال (١):

خذ المعادلة:

$\text{هـ}^{\text{ص}_{\text{ن}+٢}} - [٦\ (\text{ن}+١)\ \text{جا}^{٢}\text{ص}_{\text{ن}+١}]\ \sqrt{\text{ص}_{\text{ن}}} = ٠$ .... (٢)

فإذا جعلنا $\text{ص}_{٠}$، $\text{ص}_{١}$ القيمتين الابتدائيتين للمجهول $\text{ص}_{\text{ن}}$، يكون:

$\text{ص}_{٢} = \text{لي}\ ٦\ \sqrt{\text{ص}_{٠}}\ \ \text{جا}^{٢}\ \text{ص}_{١}$،

$\text{ص}_{٣} = \text{لي}\ (١٢\ \sqrt{\text{ص}_{١}}\ \ \text{جا}^{٢}\ \text{ص}_{٢}) = \text{لي}\ [١٢\ \sqrt{\text{ص}_{١}}\ \ \text{جا}^{٢}\ (\text{لي}\ ٦\ \sqrt{\text{ص}_{٠}}\ \text{جا}^{٢}\ \text{ص}_{١})]$. وهكذا ويبقى هذا التتابع معرفا مادام.

$٦(\text{ن}+١)\ \text{جا}^{٢}\text{ص}_{\text{ن}+١} \geq ١$،

فإذا صارت هذه العبارة أقل من ١ يصبح $\text{ص}_{\text{ن}+٢}$ سالباً، وعندها تحتوي عبارة $\text{ص}_{\text{ن}+٤}$ على $\sqrt{\text{ص}_{\text{ن}+٢}}$ السالب، وليس لذلك حل حقيقي، ولا فائدة في

هذه الحالة من البحث عن حل بطريقة تجميع بسيط لاقترانات ابتدائية.

وإليك مثالاً آخر على الصعوبات التي تنشأ عن طريقة التتابع:

المثال (٢):

خذ المعادلة:

$$\text{سا}\ \{\text{جا}\ [(\text{ص}_{\text{ن}+٢}\ \text{ص}_{\text{ن}+١})^{\frac{١}{٣}}\ \text{ص}_{\text{ن}}^{٥}]\} = \text{جتا}\ (\text{ص}_{\text{ن}+٢}\ \text{ص}_{\text{ن}+١})^{\frac{١}{٢}}\ \text{ص}_{\text{ن}}.$$

فحتى لو عرف $\text{ص}_{٠}$، $\text{ص}_{١}$ لانجد طريقة لاستنتاج تعبير صريح للمجهول $\text{ص}_{٢}$ بدلالة $\text{ص}_{٠}$، $\text{ص}_{١}$ وفي هذا الفصل سندرس صنفاً من معادلات الفروق لا تنشأ فيه المشاكل التي رأيناها في هذين المثالين.

وتعتبر معادلة الفروق ذات الرتبة الثانية خطية اذا خلت من اقترانات غير خطية ومن ضرب للمقادير المجهولة $\text{ص}_{\text{ن}+٢}$، $\text{ص}_{\text{ن}+١}$، $\text{ص}_{\text{ن}}$، بعضها في بعض. فمثلاً $\text{ص}_{\text{ن}+٢} + (٣\text{ن}^{٣}\text{جان})^{٥}\ \text{ص}_{\text{ن}+١} + \text{ص} = \text{جتان}^{٣}$ خطية.

في حين أن $\text{ص}_{\text{ن}+٢} + \text{ص}_{\text{ن}+١}\ \text{ص}_{\text{ن}} = ٠$ غير خطية. وأعم معادلة خطية من الرتبة الثانية يمكن أن تكتب بالصيغة:

$$\text{ص}_{\text{ن}+٢} + \text{أ}_{\text{ن}}\ \text{ص}_{\text{ن}+١} + \text{ب}_{\text{ن}}\ \text{ص}_{\text{ن}} = \text{ق}_{\text{ن}}.$$

فإذا كان $\text{أ}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن}}$، $\text{ق}_{\text{ن}}$ معرفين لكل $\text{ن} \leq ٠$ وكان $\text{ص}٠$، $\text{ص}١$ معلومين، يكون $\text{ص}_{٢} = \text{ق}_{٠} - \text{أ}_{٠}\ \text{ص}_{١} - \text{ب}_{٠}\ \text{ص}_{٠}$،

$\text{ص}_{٣} = \text{ق}_{١} - \text{أ}_{١}\ \text{ص}_{٢} - \text{ب}_{١}\ \text{ص}_{١}$،....

فالتتابع المعرف على هذا النحو لا ينتهي. فلدينا اذن النظرية التالية عن المعادلات الخطية.

النظرية (١):

إذا كان $ح_{٠}$، $ح_{١}$ ثابتين معروفين، وكانت $أ_{ن}$، $ب_{ن}$، $ق_{ن}$ معرفة لكل قيم $ن \leq ٠$ ، كان هنالك حل وحيد للمعادلة:

$$ص_{ن+٢} + أ_{ن}\, ص_{ن+١} + ب_{ن}\, ص_{ن} + ق_{ن} \quad \text{.......................} \quad (٣)$$

يحقق $ص_{٠} = ح_{٠}$، $ص_{١} = ح_{١}$

ومطابقة لمصطلحات واردة سابقاً، نسمي المعادلة (٣) متجانسة اذا كان $ق_{ن}=٠$ لكل قيم ن، والا فهي غير متجانسة. وإذا كان $أ_{ن}$، $ب_{ن}$ ثابتين لا يتغيران بتغير ن نقول ان المعادلة (٣) لها معاملات ثابتة.

ورغم أن النظرية (١) تضمن حلاً وحيداً لمسألة القيم الابتدائية الخطية، الا اننا في البنود القليلة التالية سنبحث عن وسائل لإيجاد الحل العام للمعادلة (٣) بطريقة لا تتضمن التتابع المستمر وفي اثناء ذلك سنكتشف صلات هامة بين حلول معادلات الفروق ذات المرتبة الثانية ونظيراتها من المعادلات التفاضلية.

التمارين:

في التمارين من ١ إلى ١٠ ميز معادلة الفروق الخطية من غير الخطية، واذا كانت خطية، بين أمتجانسة هي أم غير متجانسة، وهل معاملاتها ثابتة أم متغيرة:

١. $ص_{ن+٢} - ن + ص_{ن} = ٠$ ٢. $ص_{ن+٢} - ن_{٢} + ص_{ن}^{٢} = ٠$

٣. $ص_{ن+٢} - ص_{ن+١}\, ص_{ن} = جا ن$ ٤. $٦ص_{ن+٢} - (ن+١)^{٢} ص_{ن+١} + هـ^{ن^{٢}} ص_{ن} = \sqrt{٦ن}$

٥. $ص_{ن+١} - ٣ص_{ن+٤} + ص_{ن} = ٠$ ٦. $ص_{ن+٢} - \sqrt{ص_{ن}} = \sqrt{ن}$

٧. $ص_{ن+٢}\, ص_{ن} = ٣$ ٨. $٢ص_{ن+٢} - ٥ص_{ن+١} + ١٧ص_{ن} = ن^{٢/٧}$

٩. $(ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ص_{ن})^{٢/١} = ن$ ١٠. $ص_{ن+٢} - \sqrt{ص_{ن+١} - ص_{ن}} = ٣$

١١. في المعادلة المتجانسة الخطية.

$ص_{ن+٢} + أ_{ن}\, ص_{ن+١} + ب_{ن}\, ص_{ن} = ٠$

بين انه اذا كانت قيمتان متتاليتان للحل $ص_{ن}$ صفراً كان $ص_{ن} = ٠$ لكل قيم ن.

١٢. على فرض أن $س_{ن}$، $ص_{ن}$، حلان للمعادلة المتجانسة الخطية.

$ص_{ن+٢} + أ_{ن}\, ص_{ن+١} + ب_{ن}\, ص_{ن} = ٠$،

وان $س_{ك} = ص_{ك} = ٠$ حيث ك عدد صحيح ما، فبين أن هنالك ثابتاً ما، حـ حيث $ص_{ن} = حـ\, س_{ن}$ لكل قيم ن.

* خصائص حلول المعادلات الخطية.

نبدأ بالمعادلة المتجانسة.

$ص_{ن+٢} + أ_{ن}\, ص_{ن+١} + ب_{ن}\, ص_{ن} = ٠$ ....(٤)

فمن المعادلة (٤) يشتمل على متتالية من الأعداد الحقيقية: $ص_{٠}$، $ص_{١}$، $ص_{٢}$،......،$ص_{ن}$،..... تحقق (٤) لكل قيم ن ≥ ٠ الصحيحة. ولتجنب كتابة المتتاليات، نعبر عن هذا الحل بالحد $ص_{ن}$.

والتوفيق الخطي للحلين $س_{ن}$، $ص_{ن}$ للمعادلة (٤) هو أيضاً متتالية $أس_{٠} + ب\, ص_{٠}$، $أس_{١} + ب\, ص_{١}$، .....، $أس_{ن} + ب\, ص_{ن}$،.... حيث أ، ب عددان حقيقان. ويكون الحلان $س_{ن}$، $ص_{ن}$ للمعادلة (٤) مستقلين خطياً إذا كان

ل س$_{ن}$ + م ص$_{ن}$ = ٠ فقط مع ل = م = ٠ وهذا يعادل قولنا ان ليس هنالك عدد ثابت حـ حيث س$_{ن}$ = جـ ص$_{ن}$ لكل قيم ن. وهذا التعريفان يمكن توسيعهما حتى يشملا ك حلولاً للمعادلة (٤).

النظرية (٢):

كل تجميع خطي لحلول المعادلة (٤) هو أيضاً لحل هذه المعادلة.

البرهان:

نحتاج فقط أن نبرهن أنه إذا كان س$_{ن}$، ص$_{ن}$ حلين للمعادلة (٤) كان ع$_{ن}$ = ل س$_{ن}$ + م ص$_{ن}$ حلاً لها.

ع$_{ن+٢}$ + أ$_{ن}$ع$_{ن+١}$ + ب$_{ن}$ع$_{ن}$ = ل س$_{ن+٢}$ + م ص$_{ن+٢}$ + أ$_{ن}$ (ل س$_{ن+١}$ + م ص$_{ن+١}$) + ب$_{ن}$ (ل س$_{ن}$ + م ص$_{ن}$).

= ل(س$_{ن+٢}$ + أ$_{ن}$ س$_{ن+١}$+ ب$_{ن}$ س$_{ن}$) + م(ص$_{ن+٢}$ + أ$_{ن}$ ص$_{ن+٢}$ + ب$_{ن}$ ص$_{ن}$)=٠

نستطيع الآن ان نعين مقابلاً للرنسكية في معادلات الفروق وهي القيسارية (Casoration) فاذا كان س$_{ن}$، ص$_{ن}$ حلين للمعادلة (٤)، فإن قيسارية س$_{ن}$، ص$_{ن}$ هي:

ق (س، ص) = س$_{ن}$ ص$_{ن+١}$ − س$_{ن+١}$ ص$_{ن}$........................ (٥)

وقد برهنا ان المعادلة التفاضلية المتجانسة الخطية ذات الرتبة الثانية لها حلان مستقلان خطياً. وينطبق هذا على معادلة الفرق المتجانسة الخطية ذات الرتبة شرط الا يكون اي من المعاملات ب$_{ن}$ في المعادلة (٤) صفراً. وتظهر الحاجة إلى هذا الشرط واضحة عندما نتصور تلاشي كل المعاملات ب$_{ن}$ اذ

عندها تصبح المعادلة (٤) معادلة من الدرجة الأولى ولا يكون لها حلان مستقلان خطياً. والنظرية التالية تبين لماذا كل $ب_{ن}$ يجب أن يكون غير الصفر وسنترك برهانها للطالب.

النظرية (٣):

اذا كان احد المعاملات $ب_{ن}$، وفي المعادلة (٤) صفراً، فعندها لا يكون للمعادلة (٤) حلان مستقلان خطياً. والحقيقة التالية تشابه النتيجة (٣):

النظرية (٤):

افرض ان $س_{ن}$، $ص_{ن}$ حلان للمعادلة (٤) وأن $ب_{ن} \neq ٠$ لكل ن=١،٢،٣،.... فعندها يكون $س_{ن}$، $ص_{ن}$ مستقلين خطياً اذا وفقط إذا كان ل(س،ص)$\neq$٠ مع قيمة صحيحة للعدد ن.

البرهان:

نبدأ باثبات أن ل (س،ص) لا تساوي صفراً وأن $ل_{ن}$(س،ص) = ٠ لكل قيم ن فمن المعادلة (٥) نجد أن:

$$ل_{ن+١} = س_{ن+١}\, ص_{ن+٢} - س_{ن+٢}\, ص_{ن+١} \qquad (٦)$$

ولأن $س_{ن}$، $ص_{ن}$، حلان للمعادلة (٤) يمكن أن نعوض عن $س_{ن+٢}$، $ص_{ن+٢}$ في (٦) بقيمتها كما يلي:

$$س_{ن+٢} = -أ_{ن}\, س_{ن+١} - ب_{ن}\, س_{ن}،\quad ص_{ن+٢} = -أ_{ن}\, ص_{ن+١} - ب_{ن}\, ص_{ن} \qquad (٧)$$

فينتج $_{ن+١} = س_{ن+١}\,(-أ_{ن}\, ص_{ن+١} - ب_{ن}\, ص_{ن}) - ص_{ن+١}\,(-أ_{ن}\, س_{ن+١} - ب_{ن}\, س_{ن})$

$$= ب_{ن}\,[س_{ن}\, ص_{ن+١} - س_{ن+١}\, ص_{ن}] \qquad (٨)$$

أي أن $ق_{ن+1} = ب_ن ق_ن$ ....(٩)

[لاحظ أن التشابه بين المعادلة (٩) والمعادلة الرنسكية] وكما علمنا فإن المعادلة (٩) حلها $ق_{ن+1} = (\prod_{ي}^{ن} ب_ي) ق.$

فلأن $ب_ي \neq ٠$ حسب الفرض، فان $ق_ن$ اما ان يكون دائماً صفراً أو الا يساوي صفراً أبداً، حسب كون $ق.$ صفراً أولاً.

نستطيع الآن ان نبرهن على النظرية ببيان ان الحلين $س_ن$، $ص_ن$ للمعادلة (٤) يكونان مستقلين خطياً إذا، وفقط إذا كان $ن(س، ص) = ٠$ (لكل قيم ن).

فإذا كان $س_ن$، $ص_ن$ غير مستقلين خطياً فهنالك عدد ثابت حـ حيث $ص_ن = حـ\, س_ن$ لكل قيم ب فيكون.

$$ن_ن(س، ص) = س_ن ص_{ن+1} - ص_ن س_{ن+1}$$

$$= س_ن (حـ\, س_{ن+1}) - (حـ\, س_ن) س_{ن+1} = ٠$$

ومن ناحية اخرى، اذا كان $ن_ن(س،ص) = ٠$، يكون $ن.(س،ص) = ٠$ فيكون $س.\, ص_1 = س_1\, ص.$ .... (١٠)

وهنالك حالتان للدراسة، حسب كون $س. \neq ٠$ ، $س. = ٠$

الحالة (١):

اذا كان $س. \neq ٠$ فان المعادلة (١٠) تتضمن أن:

$$ص_1 = \left(\frac{ص.}{س.}\right) س_1.$$

فليكن $جـ = ص_٠ / س_٠$، فيكون $ص_٠ = \left(\frac{ص_٠}{س_٠}\right) س_٠ = حـ\, س_٠$

ومن المعادلة (٤) ينتج أن

$$ص_٢ = -أ_٠ ص_١ - ب_٠ ص_٠ = -أ_٠ (حـ\, س_١) - ب (حـ\, س_٠)$$

$$= حـ (-أ_٠ س_١ - ب\, س_٠) = حـ\, س_٢$$

وبالمثل ينتج أن $ص_٣ = حـ\, س_٣$، $ص_٤ = حـ\, س_٤$، وهكذا، لكل قيم ن. فيكون $ص_ن = حـ\, س_ن$، ويكون $س_ن$، $ص_ن$ متناسبين خطياً، غير مستقلين.

الحالة الثانية. إذا كان $س_٠ = ٠$، فإما أن يكون $س_١ = ٠$ أو ان يكون $س_٠ \neq ٠$ فإذا كان $س_١ = ٠$ فمن المعادلة (٤) ينتج أن $س_٢ = ٠$، $س_٣ = ٠$ وهكذا، لكل قيم ن فيكون $س_ن = ٠ \times ص_ن$ وتكون الحلول متناسبة. وإذا كان $س_١ \neq ٠$، فمن المعادلة (١٠) يكون.

$$ص_٠ = \left(\frac{ص_١}{س_١}\right) س_٠ \text{ فليكن } حـ = \frac{ص_١}{س_١}\text{، فيكون}$$

$$ص_١ = \left(\frac{ص_١}{س_١}\right) س_١ = حـ\, س_١$$ وباقي الحل كما في الحالة الأولى.

ولإكمال البحث في المعادلات المتجانسة سنثبت النظرية التالية:

النظرية (٥):

إذا كان $س_ن$، $ص_ن$ حلين مستقلين خطياً للمعادلة (٤) وكان $ع_ن$ حلاً اخر لها. فإن $ع_ن$ يمكن ان يكتب بصيغة تجميع خطي للحلين $س_ن$، $ص_ن$.

البرهان:

خذ المنظومة الخطية $س_٠ حـ_١ + ص_٠ حـ_٢ = ع_٠$ ....(١١)

$س_١ جـ_١ + ص_١ حـ_٢ = ع_١$.

حيث جـ١، جـ٢ غير معروفين فمحددة هذه المنظومة هي $\omega(س،ص)$ وهذه ليست صفراً لأن $س_ن$، $ص_ن$ مستقلان خطياً. اذن فللمنظومة حل وحيد، $جـ_١$، $جـ_٢$ والمتتالية $ع^*_ن = جـ_١ س_ن + جـ_٢ ص_ن$ تحقق الشرطين $ع^*_٠ = ع_٠$، $ع^*_١ = ع_١$. ولأن مسألة القيمة الابتدائية لها حل وحيد، ينتج أن $ع^*_ن = ع_ن$. وهذا ينهي البرهان.

بحصولنا على هذه النتيجة، يمكن أن نتكلم عن الحل العام للمعادلة (٤) فهو:

$ع_ن = جـ_١ س_ن + جـ_٢ ص_ن$..(١٢)

حيث $س_ن$، $ص_ن$ حلان مستقلان خطياً للمعادلة (٤).

لننظر الآن باختصار في المعادلة غير المتجانسة:

$ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن = ق_ن$..............................(١٣)

النظرية (٦):

اذا كان $ص_ن$ حلاً للمعادلة (٣)، وكان $س_ن$ أي حل آخر، كان $ع_ن = س_ن - ص_ن$ حلاً للمعادلة (٤).

البرهان:

لدينا $ع_{ن+٢} + أ_ن ع_{ن+١} + ب_ن ع_ن$

$= (س_{ن+٢} - ص_{ن+٢}) + أ_ن (س_{ن+١} - ص_{ن+١}) + ب_ن (س_ن - ص_ن)$

$= (س_{ن+٢} + أ_ن س_{ن+١} + ب_ن س_ن) + (ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن)$

$= ق_ن - ق_ن = ٠$

بعد ان عرفنا النظرية، يتضح لنا ان الحصول على جميع حلول المعادلة (١٣) غير المتجانسة لا يقتضي الا الحصول على حل واحد للمعادلة (١٣) بالاضافة إلى الحل العام للمعادلة (٤)، كما هو الحال في المعادلات التفاضلية.

تمارين:

في التمارين (١) إلى (٥) تحقق أن $س_ن$، $ص_ن$، حلا لكل معادلة فرق، ثم احسب فيساريتها.

١. $ص_{ن+٢} - ٣ص_{ن+١} + ٢ص_ن = ٠$ ؛ $س_ن = ٢^ن$ ، $ص_ن = ١$

٢. $ص_{ن+٢} - ٤ص_{ن+١} + ٤ص_ن = ٠$ ؛ $س_ن = ٢^ن$، $ص_ن = ن\ ٢^ن$

٣. $ص_{ن+٢} + ص_ن = ٠$ ؛ $س_ن =$ جتا $(ن\pi/٢)$، $ص_ن =$جا $(ن\pi/٢)$

٤. $ص_{ن+٢} - (ن+٢)(ن+١)\, ص_ن = ٠$ ؛ $س_ن = ن!$ ؛ $ص_ن = (-١)^ن ن!$

٥. $ص_{ن+٢} - ٧ص_{ن+١} + ١٢ص_ن = ٠$ ؛ $س_ن = ٣^ن$ ، $ص_ن = ٤^ن$

٦. إذا كان $س_ن$ حلاً للمعادلة $ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن = ق_ن$، وكان $ع_ن$ حلاً للمعادلة $ص_{ن+٢} + أ_ن ص_{ن+١} + ب_ن ص_ن = ف_ن$، فبين أن $س_ن + ع_ن$

حل للمعادلة $ص_{ن+٢} + أ_ن\, ص_{ن+١} + ب_ن\, ص_ن = ق_ن + ف_ن$ هذا هو مبدأ التراكم في معادلات الفروق.

٧. هذه معادلة متجانسة من الرتبة الثالثة:

$$ص_{ن+٣} + أ_ن\, ص_{ن+٢} + ب_ن\, ص_{ن+١} + جـ_ن\, ص_ن = ٠$$

بين انه إذا كان $س_ن$، $ص_ن$، $ع_ن$ حلولاً لها كانت اي ضمة خطية لهذه الحلول حلاً آخر.

٨. في معادلة التمرين ٧ نعرف القيسارية كما يلي:

$$ق_ن(س،ع،ص) = \text{محد} \begin{vmatrix} س_ن & ص_ن & ع_ن \\ س_{ن+١} & ص_{ن+١} & ع_{ن+١} \\ س_{ن+٢} & ص_{ن+٢} & ع_{ن+٢} \end{vmatrix}$$ اثبت ان $ق_{ن+١}(س، ص، ع) =$ $جـ_ن\, ق_ن\,(س، ص، ع)$

واستنتج انه إذا كان $جـ_ن \neq ٠$ لكل ن = ٠، ١، ٢،.. كان $ق_ن$ (س، ص، ع) صفراً دائماً، أو انه لا يكون صفراً أبداً.

٩. في التمرين ٨، بين انه إذا كان $جـ_ن \neq ٠$ لكل قيم ن، وكان كل من الحلول $س_ن$، $ص_ن$، $ع_ن$ لا يطابق الصفر، كان $ق_ن$ (س، ص، ع) $\neq ٠$ اذا، وفقط اذا كانت الحلول الثلاثة مستقلة خطياً.

١٠. في التمرين ٩، إذا علمنا ان الحلول الثلاثة مستقلة خطيا وان $غ_ن$ حل آخر فبين أن هنالك ثوابت أ، ب، جـ حيث $غ_ن = أ س_ن + ب ص_ن + جـ ع_ن$ لكل ن.

١١. بين انه إذا كان $س_ن$، $ص_ن$ حلين للمعادلة غير المتجانسة ذات الرتبة الثالثة

$ص_{ن+3} + أ_ن\, ص_{ن+2} + ب_ن\, ص_{ن+1} + جـ_ن\, ص_ن = ق_ن$.

كان $ع_ن = س_ن - ص_ن$ حلاً لرفيقتها المتجانسة.

١٢. على فرض أن للمعادلة: $ص_{ن+2} + أ_ن\, ص_{ن+1} + ب_ن\, ص_ن = 0$، $ص_0 = 0$

حلاً غير الصفر يحقق الشرط $ص_ك = 0$ حيث ك عدد ما > 0، اثبت ان $س_ك = 0$ في اي حل آخر سن لهذه المعادلة.

١٣. اثبت النظرية (٣).

* استعمال حل لإيجاد حل آخر.

لنأخذ المعادلة المتجانسة الخطية.

$ص_{ن+2} + أ_ن\, ص_{ن+1} + ب_ن\, ص_ن = 0$، $ب_ن \neq 0$

فاذا كانت المتتاليتان $أ_ن$، $ب_ن$ ليست ثوابت فليس هنالك طريق عامة لايجاد حلول. ولكن، كشأننا في المعادلات التفاضلية المتجانسة ذات الرتبة الثانية، إذا عرفنا حلاً يمكن أن نجد حلاً يمكن ان نجد حلاً آخر مستقلاً عنه خطياً.

افرض ان $س_ن$ حل معروف غير الصفر، للمعادلة (١٤)، وسنبحث لها عن حل آخر بالشكل:

$ص_ن = ف_ن\, س_ن$، .... (١٥)

حيث فإن متتالية غير ثابتة يراد معرفتها. فلنأخذ متتالية أخرى.

$ك_ن = ف_{ن+1} - ف_ن$.. (١٦)

ولنتذكر ان القيسارية $\text{و}_{\text{ن}}$ (س، ص) هي بالشكل $\text{و}_{\text{ن}}$ (س، ص) = $\text{س}_{\text{ن}}\ \text{ص}_{\text{ن}+1} - \text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{ص}_{\text{ن}}$ حيث $\text{س}_{\text{ن}}$، $\text{ص}_{\text{ن}}$ اي حلين للمعادلة (١٤)، ولنفرض ان $\text{ص}_{\text{ن}}$ هو فعلاً حل. فنحصل بعد التبسيط الجبري على:

$$\text{و}_{\text{ن}}(\text{س}،\ \text{ص}) = \text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{س}_{\text{ن}} \left(\frac{\text{ص}_{\text{ن}+1}}{\text{س}_{\text{ن}+1}} - \frac{\text{ص}_{\text{ن}}}{\text{س}_{\text{ن}}} \right)$$

$$= \text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{س}_{\text{ن}} (\text{ف}_{\text{ن}+1} - \text{ف}_{\text{ن}}) = \text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{س}_{\text{ن}}\ \text{ك}_{\text{ن}} \quad \text{.........................(١٧)}$$

اي ان $\text{ك}_{\text{ن}} = \dfrac{\text{و}_{\text{ن}}(\text{ص}،\text{س})}{\text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{س}_{\text{ن}}}$ .... (١٨) فإذا استعملنا القيسارية الصيغة التي تلت المعادلة (٨) ينتج $\text{ك}_{\text{ن}} = \dfrac{\prod_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1} \text{ب}_{\text{ر}}}{\text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{س}_{\text{ن}}}$ ....(١٩)

حيث فرضنا ان $\text{و}_{0} = 1$، وهذا مقبول لأن الحل المجهول $\text{ص}_{\text{ن}}$ مستقل عن $\text{س}_{\text{ن}}$ (وهذا يعني ان $\text{و}_{0} \neq 0$) ومعرف حتى ن = ثابتاً ما.

وأخيراً، من (١٩) نستنتج معادلة فرق من الرتبة الأولى هي:

$$\text{ف}_{\text{ن}+1} - \text{ف}_{\text{ن}} = \frac{\prod_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ب}_{\text{ر}}}{\text{س}_{\text{ن}+1}\ \text{س}_{\text{ن}}} = (\text{ن})، \quad \text{.................................(٢٠)}$$

وهذه، كلها كما يلي: $\text{ف}_{\text{ن}} = \text{ف}_{0} + \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1} \text{د}_{\text{ر}}$ ....(٢١)

ولأن $\text{س}_{\text{ن}}$، $\text{ب}_{\text{ن}}$ ليس أي منها صفراً فان $\text{د}_{\text{ن}}$ ليست صفراً، مهما تكن ن. لذا فان $\text{ف}_{\text{ن}}$ ليست عدداً ثابتاً اذن فان $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ف}_{\text{ن}}\ \text{س}_{\text{ن}}$ هي حل آخر للمعادلة (١٤) مستقل خطياً عن الحل $\text{س}_{\text{ن}}$.

المثال (١):

$ص_{ن+٢} + ٤ص_{ن+١} + ٤ص_{ن} = ٠$ هنالك حل ليسهل تبنيه: $س_{ن} = ٢^{ن}$ (سندرس المزيد عن المعادلات ذات المعاملات الثابتة في البندين التالين).

لنجعل $ص_{ن} = ف_{ن}\, س_{ن}$ حلاً آخر، فمن (٢٠) ينتج:

$د_{ن} = \dfrac{\prod_{ر=٠}^{ن+١} ب_{ر}}{س_{ن}\, س_{ن+١}} = \dfrac{٤^{ن}}{٢^{ن} \times ٢^{ن+١}} = \dfrac{١}{٢}$ فيكون $ف_{ن} = ف_{٠} + \dfrac{ن}{٢}$ ونختار $ف_{٠}$.

لاعلى التعيين، فلتكن $ف_{٠} = ٠$، فيكون $ف_{ن} = \dfrac{ن}{٢}$، $ص_{ن} = \dfrac{ن}{٢} س_{ن} = \dfrac{ن٢^{ن}}{٢}$.

فالحل العام إذن $ص_{ن} = جـ_{١}\, ٢^{ن} + جـ_{٢}\, ن٢^{ن}$، (الحق مقام الكسر بالثابت $جـ_{٢}$).

المثال (٢):

ليكن $ص_{ن+٢} - (ن+٢)(ن+١)\, ص_{ن} = ٠$ يسهل أن نتحقق ان $س_{ن} = ن!$ هو حل. فلأن $ب_{ن} = -(ن+٢)(ن+١)$، يكون:

$$د_{ن} = \dfrac{\prod_{ر=٠}^{ن-١} ب_{ر}}{س_{ن}\, س_{ن+١}} = \dfrac{(-١)^{ن}(ن+١)!\, ن!}{(ن+١)!\, ن!} = (-١)^{ن}$$

فيكون $ف_{ن} = ف_{٠} + \sum_{ر=٠}^{ن-١} د_{ر} = ف_{٠} + \dfrac{١-(-١)^{ن}}{٢}$، لأن المتتالية الهندسية

$١ + م + م^{٢} + \ldots\ldots + م^{ن-١} = (١ - م^{ن}) / (١-م)$. ولأن $ف_{٠}$ اعتياطي نعتبر $ف_{٠} = \dfrac{-١}{٢}$ فيكون $ص_{ن} = ف_{ن}\, س_{ن} = \dfrac{-(-١)^{ن}}{٢} ن!$ والحل العام هو $ص_{ن}$

= $جـ_1$ ن! + $جـ_2$ (−1)ن ن! لاحظ ان ن!، $(-1)^{ن}$ ن! مستقلان خطياً لأن $(-1)^{ن}$ ليس ثابتاً.

التمارين:

في كل من التمارين التالية معادلة فرق وحل لها والمطلوب إيجاد حل آخر مستقل عنه خطياً:

١. $ص_{ن+2} - 2ص_{ن+1} + ص_{ن} = 0$ ، $س_{ن} = 7$

٢. $ص_{ن+2} + 7ص_{ن+1} + 10ص_{ن} = 0$ ، $س_{ن} = (-2)^{ن}$

٣. $(ن+2)\,ص_{ن+2} - (ن+1)\,ص_{ن+1} - ص_{ن} = 0$ ، $س_{ن} = 3$

٤. $ص_{ن+2} + 16ص_{ن} = 0$ ، $س_{ن} = 4^{ن}$ جتا ن $\frac{\pi}{2}$

٥. $ص_{ن+2} + 6ص_{ن+1} + 8ص_{ن} = 0$ ، $س_{ن} = 4^{ن}$

٦. $ص_{ن+2} + 6ص_{ن+1} + 9ص_{ن} = 0$ ، $س_{ن} = (5ن)3^{ن-1}$

٧. $ص_{ن+2} - ص_{ن+1} - (ن+1)^2ص_{ن} = 0$، $س_{ن} = ن!$

٨. $ص_{ن+2} - (ن+1)\,ص_{ن+1} - (ن+1)\,ص_{ن} = 0$ ؛ $س_{ن} = ن!$

*** المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة:**

حالة الجذور الحقيقية

ندرس الآن المعادلة المتجانسة الخطية ذات المعاملات التالية:

$ص_{ن+2} + أص_{ن+1} + ب\,ص_{ن} = 0$ ، $ب \neq 0$، ....(٢٢)

ونعطي طريقة سهلة لإيجاد حل عام لها.

اما معادلة الرتبة الأولى $ص_{ن+١} = أص_{ن+١}$، فقد رأينا ان حلها العام هو $ص_ن = أ^ن ص$. فليس مستنكراً اذن ان نحزر ان هناك حلولاً للمعادلة (٢٢) بالشكل $ص_ن = \lambda^ن$ حيث λ ذات قيمة ما (حقيقية أو مركبة). فنعوض $ص_ن = \lambda^ن$ في المعادلة (٢٢) فينتج:

$$\lambda^{ن+٢} + أ\lambda^{ن+١} + ب\lambda^ن = ٠$$

ولأن هذه المعادلة تصح لكل ن > ٠ فهي تصح عند ن = ٠، فيكون

$$\lambda^٢ + أ\lambda + ب = ٠ \quad ....(٢٣)$$

وهذه هي المعادلة المساعدة، لمعادلة الفرق (٢٢) وهي تطابق مساعدة المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية، والتي تم استنتاجها سابقاً، فهنا أيضاً جذرا المعادلة.

$$\lambda_١ = \frac{-أ + \sqrt{أ^٢ - ٤ب}}{٢} ، \quad \lambda_٢ = \frac{-أ - \sqrt{أ^٢ - ٤ب}}{٢} \quad ....(٢٤)$$

وهنا أيضاً امامنا ثلاث حالات

الحالة الأولى:

$أ^٢ - ٤ب > ٠$ وفي هذه الحالة هنالك جذران حقيقيان مختلفان، $\lambda_١$، $\lambda_٢$ يعطيهما (٢٤)، فيكون $س_ن = \lambda_١^ن$، $ص_ن = \lambda_٢^ن$ حلين للمعادلة (٢٢) لأن $و(س، ص) = س_{ن+١}ص_ن - س_ن ص_{ن+١} = \lambda_١^ن \lambda_٢^ن (\lambda_١ ، \lambda_٢)$، فان $و(س، ص)$ ليست صفراً الا في حالة عندما تكون $\lambda_١$ أو $\lambda_٢$ صفراً. وهذا لا يتم الا إذا كانت ب = ٠ وهذا ما استبعدناه، اذن فقد برهنا النظرية التالية:

النظرية (٧)

اذا كان $أ^{٢} - ٤\,ب > ٠$ كان الحل العام للمعادلة (٢٢) هو:

$ص_{ن} = جـ_{١}\,\lambda_{١}^{ن} + جـ_{٢}\,\lambda_{٢}^{ن}$ ....(٢٥)

حيث $جـ_{١}$، $جـ_{٢}$ ثابتان $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ كما في (٢٤)

المثال (١):

خذ المعادلة $س_{ن+٢} + ٥\,س_{ن+١} - ٦\,س_{ن} = ٠$

المعادلة المساعدة هي $\lambda^{٢} + ٥\lambda - ٦ = ٠$ وجذراها $\lambda_{١} = ٦$ ، $\lambda_{٢} = -١$، فالحل العام:

$ص_{ن} = جـ_{١}\,(٦)^{ن} + جـ_{٢}\,(-١)^{ن}$. فاذا اعطينا الشرطين الابتدائين $ص_{٠} = ٣$، $ص_{١} = ١١$، مثلاً نحصل على المنظومة:

$جـ_{١} + جـ_{٢} = ٣$،

$٦جـ_{١} - جـ_{٢} = ١١$،

وحلها الوحيد $جـ_{١} = ٢$، $جـ_{٢} = ١$. فالحل الخاص هو $ص_{ن} = ٢ \times ٦^{ن} + (-١)^{ن}$

الحالة الثانية:

$أ^{٢} - ٤ب = ٠$ هنا يتساوى جذرا المعادلة (٢٣) فلدينا الحل $ص_{ن} = \lambda_{٢}^{ن}$ حيث $\lambda = -أ / ٢$. ويمكن الحصول على حل آخر مستقل خطياً عن هذا بطريقة البند السابق. نجعل $ص_{ن} = ف_{ن}$ $س_{ن}$ يرمز إلى الحل الآخر، فينتج من (٢٠):

$$\text{د}_{\text{ن}} = \frac{\prod_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1} \text{ب}_{\text{ر}}}{\text{ص}_{\text{ن}+1}\text{ص}_{\text{ن}}} = \frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\lambda^{\text{ن}+1}\lambda^{\text{ن}}} = \frac{\text{ب}^{\text{ن}}}{\lambda^{2\text{ن}+1}}$$. ولكن $\text{ب} = (\text{أ}/2)^2$، $= (-\text{أ}/2)$،

فيكون

$$\text{د}_{\text{ن}} = \frac{(\text{أ}/2)^{2\text{ن}}}{(-\text{أ}/2)^{2\text{ن}+1}} = \frac{1}{(-\text{أ}/2)} = \frac{1}{\lambda}$$

فاذن $\text{ف}_{\text{ن}} = \text{ف}_0 + \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}-1} \text{د}_{\text{ر}} = \text{ن}/\lambda$ (نجعل ف = ٠) فيكون $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن}\,\lambda^{\text{ن}-1}$.

اذن فقد بينا النتيجة التالية.

النظرية (٨):

إذا كان $\text{أ}^2 - 4\text{ب} = 0$ يكون الحل العام للمعادلة (٢٢) هو

$\text{ص}_{\text{ن}} = \text{جـ}_1\lambda^{\text{ن}} + \text{جـ}_2\,\text{ن}\,\lambda^{\text{ن}}$، .... (٢٦)

حيث $\lambda = -\text{أ}/2$، جـ_1، جـ_2 ثابتان اعتياطيان.

المثال (٢):

خذ المعادلة $\text{ص}_{\text{ن}+2} - 6\text{ص}_{\text{ن}+1} + 9\text{ص}_{\text{ن}} = 0$،......................(٢٧)

والشرطين الابتدائيين $\text{ص}_0 = 5$، $\text{ص}_1 = 12$. فالمعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

ولها جذر مزدوج هو $\lambda = 3$.

فالحل العام $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{جـ}_1\, 3^{\text{ن}} + \text{جـ}_2\, \text{ن} 3^{\text{ن}} = 3^{\text{ن}}(\text{جـ}_1 + \text{ن}\,\text{جـ}_2)$ فنـدخل الشرطين الابتدائيين فينتج:

$ج_1 = ٥$،

$٣ج_1 + ٣ ج_2 = ١٢$

فالحل الوحيد هو $ج_1 = ٥$، $ج_2=-١$، فالحل الخاص للمعادلة (٢٧) هـو $ص_ن = ٥×٣^ن - ن×٣^ن = ٣^ن (٥-ن)$ وسندرس الحالة الثالثة في البند القادم.

التمارين:

في التمارين من ١ إلى ١٠ اوجد الحل العام للمعادلة المعطاه، وإذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الوحيد الذي يحققها:

١. $ص_{ن+٢} - ٣ص_{ن+١} - ٤ص_ن = ٠$

٢. $ص_{ن+٢} + ٧ص_{ن+١} + ٦ص_ن = ٠$ ، $ص_٠= ٠$ ، $ص_١ = ١$

٣. $٦ص_{ن+٢} + ٥ص_{ن+١} + ص_ن = ٠$ ، $ص_٠ =١$ ، $ص_١ = ٠$

٤. $ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ٦ص_ن = ٠$ ، $ص_٠=١$ ، $ص_١ = ٢$.

٥. $ص_{ن+٢} + ٢ص_{ن+١} + ص_ن = ٠$

٦. $ص_{ن+٢} + ١٦ ص_{ن+١} + ٦٤ ص_ن= ٠$ ، $ص_٠=٢$ ، $ص_١=٠$

٧. $ص_{ن+٢} - \frac{٢}{٣}ص_{ن+١} + \frac{١}{٩}ص_ن = ٠$

٨. $٣ص_{ن+٢} - ٢ص_{ن+١} - ص_ن = ٠$ ، $ص_٠=١$، $ص_١ = ٣$

٩. $١٠ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} - ص_ن = ٠$

١٠. $٣٦ص_{ن+٢} - ٦٠ص_{ن+١} + ٢٥ص_ن= ٠$

١١. في دراسة للأمراض المعدية احتفظت احدى المدارس بسجل عن حوادث انتشار الحصبة. وقد قدر ان احتمال حدوث حالة عدوى واحدة على الأقل بعد ن اسابيع من انتشار المرض هي $ح_ن = ح_{ن-١} - \frac{١}{٥} ح_{ن-٢}$ فاذا كان $ح_٠=٠$، $ح_١=١$، فما $ح_ن$؟

بعد كم اسبوع يصبح احتمال حدوث حالة جديدة من الحصبة اقل من ١٠ في المئة؟

١٢. تعرف إعداد فيبوناتشي بأنها متتالية من اعداد بحيث ان كل واحد منها يساوي مجموع سابقيه والأعداد الأولى في المتتالية هي١،١، ٢،٣، ٥، ٨، ١٣،..

أ) ضع معادلة فرق ذات قيمة ابتدائية تتولد بها هذه الأعداد.

ب) أوجد حل هذه المعادلة.

جـ) بين ان النسبة بين كل عددين متتاليين منها تقترب من $(١ + \sqrt{٥})/٢$ عند $ن \to \infty$ تسمى هذه النسبة بالنسبة الذهبية. وقد كانت تستعمل في فن المعمار الاغريقي القديم كلما انثت ابنية مستطيلة فقد كان يعتقد انه عندما تكون هذه هي النسبة بين ضلعي المستطيل يكون منظره اكثر متعة للعين.

١٣. يتنافس فصيلتان من حشرات الفواكه وهما تعيشان في ظروف موائمة. وفي كل جيل تتزايد الفصيلة أ بمقدار ٦٠ في المئة وتزداد الفصيلة ب بمقدار ٤٠ في المئة. فاذا بدأتا بألف حشرة من كل فصيلة فكم يكون مجموعهما الكلي بعد ن أجيال؟

١٤. خذ معادلة الفرق التالية، وهي ن من الرتبة الثالثة:

$$ص_{ن+٣} + أ ص_{ن+٢} + ب ص_{ن+١} + جـ ص_{ن} = ٠$$

أ) بين أن $س_{ن} = \lambda^{ن}$ يكون حلاً للمعادلة إذا كانت تحقق المعادلة البديلة.

$$\lambda^{٣} + أ \lambda^{٢} + ب \lambda + جـ = ٠$$

ب) إذا علمت ان $\lambda_{١}$، $\lambda_{٢}$، $\lambda_{٣}$ هي جذور حقيقة مختلفة لهذه المعادلة بين ان الحل العام لها هو $ص_{ن} = جـ_{١} \lambda_{١}^{ن} + جـ_{٢} \lambda_{٢}^{ن} + جـ_{٣} \lambda_{٣}^{ن}$

جـ) إذا كان $\lambda_{١}$ جذراً مزدوجاً فبين ان الحل العام هو

$$ص_{ن} = جـ_{١} \lambda_{١}^{ن} + جـ_{٢} ن \lambda_{١}^{ن} + جـ_{٣} \lambda_{٢}^{ن}$$

د) إذا كان λ جذراً مثلثاً فبين ان الحل العام هو

$$ص_{ن} = جـ_{١} \lambda^{ن} + جـ_{٢} ن \lambda^{ن} + جـ_{٣} ن^{٢} \lambda^{ن}$$

في التمارين التالية استعمل نتائج التمرين (١٤) لايجاد الحل العام لكل من المعادلات التالية:

١٥. $ص_{ن+٣} - ٦ ص_{ن+٢} + ١١ ص_{ن+١} - ٦ ص_{ن} = ٠$

١٦. $ص_{ن+٣} + ٦ ص_{ن+٢} - ١٣ ص_{ن+١} - ٤٢ ص_{ن} = ٠$

١٧. $ص_{ن+٣} - ٣ ص_{ن+١} + ٢ ص_{ن} = ٠$

١٨. $ص_{ن+٣} - ٦ ص_{ن+٢} + ١٢ ص_{ن+١} - ٨ ص_{ن} = ٠$

١٩. $ص_{ن+٣} - ٣ ص_{ن+٢} + ٣ ص_{ن+١} - ص_{ن} = ٠$

٢٠. $ص_{ن+٣} + ٦ ص_{ن+٢} - ٣٢ ص_{ن} = ٠$

* المعادلات المتجانسة ذات المعاملات الثابتة.

حالة الجذور المركبة

عندما يكون $أ^2 - 4ب < 0$ يكون جذراً المعادلة (٢٣) هما:

$\lambda_1 = \propto + ي\, B$ ، $\lambda_2 = \propto - ي\, B$ ....(٢٨)

حيث $\propto = -أ/2$

$B = \sqrt{4ب - أ^2}/2$

ولأن الحلول ستكون من النوع $\lambda^ن$ يجب أن نبين كيف تحسب قوى الأعداد المركبة ويصبح هذا سهلاً جداً اذا عبدنا عن هذه الاعداد بالشكل القطبي: فاذا كان

$ع = ر هـ^{ي\theta}$ كان $ع_ن = (ر\, هـ^{ي\theta})^ن = ر^ن\, هـ^{ي ن\theta}$

لكن $هـ^{ي ن\theta} = جتا\, ن\theta + ي\, جا\, ن\theta$.

اذن فقد استنتجنا القاعدة التالية المسماة بقانون دي مو يفر

$(جتا\,\theta + ي\, جا\,\theta)^ن = جتا\, ن\,\theta + ي\, جا\, ن\,\theta$ .... (٢٩)

المثال (١):

ليكن $ع = 1 + ي$. فيكون $ر = \sqrt{\propto^2 + B^2} = \sqrt{2}$

$\theta = ظا^{-1}(B/\propto) = ظا^{-1}\, 1 = \pi/4$. فيكون $ع = \sqrt{2}\, هـ^{ي\pi/4}$ اذن

$ع^3 = 2^{\frac{3}{2}}\, هـ^{3ي\pi/4} = 2\sqrt{2}\,(جتا\,\frac{3\pi}{4} + ي\, جا\,\frac{3\pi}{4}) = -2 + 2ي$

وبالطبع اسهل ان نكتب (١+ي) مباشرة، ولكن القوى الأعلى للعدد ١+ي تحسب بهذه الطريقة.

نعود الآن إلى الحالة حيث $أ^{٢} - ٤ب < ٠$ فنكتب الجذرين $\lambda_{١}$، $\lambda_{٢}$ للمعادلة (٢٨) على النحو:

$\lambda_{١} = ر هـ^{ي\theta}$، $\lambda_{٢} = ر هـ^{-ي\theta}$ ....(٣٠)

حيث

$ر = \sqrt{\alpha^{٢} + B^{٢}}$ ، $\theta = ظا^{-١}(B/\alpha)$، $٠ < \theta < \pi$.

فيكون الحلان المستقلان خطياً:

$س_{ن} = (ر هـ^{ي\theta})^{ن} = ر^{ن} هـ^{ي ن \theta}$، $ص_{ن} = ر^{ن} هـ^{-ي ن \theta}$ ....(٣١)

فيكون $\frac{١}{٢}$ ($س_{ن} + ص_{ن}$) حلاً، وكذلك يكون (١/ ٢ي) ($س_{ن} - ص_{ن}$). وقد رأينا ان هذين الحلين يمكن ان يكتبا $س^{*}_{ن} = ر^{ن}$ جتا ن θ، $ص^{*}_{ن} = ر^{ن}$ جا ن θ: على التوالي.

وواضح انهما مستقلان خطياً لأن احدهما ليس مضاعفاً للآخر بعدد ثابت.

طريقة ثانية: نبين ان القيسارية $ق_{ن}(س^{*}، ص^{*})$ ليست صفراً.

$ق_{ن}(س^{*}، ص^{*}) = س^{*}_{١} ص^{*}_{٠} - س^{*}_{٠} ص^{*}_{١}$

$= ر جتا\theta \; جا(٠) - جتا(٠) \times رجا\theta = -رجا\theta$

ولأن $B = \sqrt{٤ب - أ^{٢}}/٢ \neq ٠$ ينتج أن $ر = \sqrt{\alpha^{٢} + B^{٢}} \neq ٠$، لأن

$\propto^{2}+B^{2}$ يجب أن تكون موجبة وأيضاً $\theta=$ ظا$^{-1}$ $(B/\propto)$ لا يمكن ان تكون صفراً ولا π، لأن ظا (٠) = ظا π= ٠ ظا θ = $B/\propto \neq$ ٠ فاذن ق (س*، ص*) وهذا يتضمن أن ن(س*، ص*) ليس صفراً وأن $س_ن$ ، $ص_ن$ مستقلاً خطياً. ونلخص هذه النتائج بالنظرية التالية.

النظرية (٩):

إذا كان أ$^{2}-$ ٤ب $<$ ٠ فالحل العام للمعادلة المتجانسة

$ص_{ن+٢}$ + أ$ص_{ن+١}$ + ب $ص_ن$ = ٠ هو

$ص_ن$ = $جـ_١$ $ر^{ن}$ جتان θ + $جـ_٢$ $ر^{ن}$ جانθ.........................(٣٢)

حيث ر = $\sqrt{\propto^{2}+B^{2}}$ ، θ = ظا$^{-1}$ $B/\propto$، ٠ $< \theta < \pi$، $\propto$ = $-$أ/٢

$B=$ $\sqrt{٤ب-أ^{٢}}/٢$ ، $جـ_١$، $جـ_٢$ ثابتان

المثال (٢):

في $ص_{ن+٢}$ + $ص_ن$ = ٠، المعادلة المساعدة هي λ^{2}+١ = ٠، وجذراها $\pm$ ي هنا $\propto$ = ٠ ، B =١، ر =١، θ= π/ ٢، والحل العام.

$ص_ن$ = $جـ_١$ جتا$\frac{ن\pi}{٢}$ + $جـ_٢$ جا $\frac{ن\pi}{٢}$ ....(٣٣)

هذه هي المعادلة (الحركة التوافقية المتميزة)، المقابلة للحركة التوافقية البسيطة التي فاذا جعلنا $ص_٠$ =٠، $ص_١$ = ١٠٠٠ يصير

$جـ_١$ = ٠، $جـ_١$ جتا $\frac{\pi}{٢}$ + $جـ_٢$ جا $\frac{\pi}{٢}$= ١٠٠٠، فيكون $جـ_١$ = ٠،

$جـ_٢$= ١٠٠٠، ويكون الحل الخاص: $ص_ن$ = ١٠٠٠ جا $\frac{ن\pi}{٢}$

المثال (٣):

سابقاً استخرجنا معادلة فرق تبين تأثير الأجيال السابقة في نمو السكان

$\text{س}_{\text{ن}+٢} - \text{ر}\text{س}_{\text{ن}+١} - \text{ر}\text{س}_{\text{ن}} = ٠$ ....(٣٤)

حيث ر، ز يقيسان الأهمية النسبية للجيلين السابقين

فالمعالة المساعدة هي $\lambda^{٢} - \text{ر}\lambda - \text{ز} = ٠$، وجذراها

$$\lambda_{١} = \frac{\text{ر} + \sqrt{\text{ر}^{٢} + ٤\text{ز}}}{٢} \quad ، \quad \lambda_{٢} = \frac{\text{ر} - \sqrt{\text{ر}^{٢} + ٤\text{ز}}}{٢}$$

فاذا كان $\text{ر}^{٢} > -٤\text{ز}$ كان الجذران حقيقين مختلفين وكان الحل العام:

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{جـ}_{١}\lambda_{١}^{\text{ن}} + \text{جـ}_{٢}\lambda_{٢}^{\text{ن}}$$

فاذا كان $|\lambda_{١}| < ١$ ، $|\lambda_{٢}| < ١$ كان $\text{س}_{\text{ن}} \leftarrow ٠$ حينما $\text{ن} \leftarrow \infty$. اما إذا كان $|\lambda_{١}|$ أو $|\lambda_{٢}|$ أكبر من ١ كان $|\text{س}_{\text{ن}}| \leftarrow \infty$. وإذا كان $\text{ر}^{٢} = -٤\text{ز}$، $(\text{ز} > ٠)$ فالحل العام.

$$\text{س}_{\text{ن}} = \text{جـ}_{١}(\text{ر}/٢)^{\text{ن}} + \text{جـ}_{٢}\,\text{ن}\,(\text{ر}/٢)^{\text{ن}-١}.$$

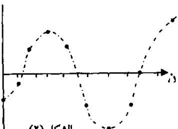
وفي هذه الحالة $\text{س}_{\text{ن}} \leftarrow ٠$ إذا كان $|\text{ر}| < ٢$،أما إذا كان $|\text{ر}| \geq ٢$ فالحل يقارب ∞ وفي الحالة الثالثة، $\text{ر}^{٢} < -٤\text{ز}$ يكون الحل العام:

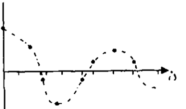
$$\text{س}_{\text{ن}} = (-\text{ز})^{\text{ن}/٢}(\text{جـ}_{١}\,\text{جتا}\,\text{ن}\theta + \text{جـ}_{٢}\,\text{جا}\,\text{ن}\theta)،$$

حيث $\theta = \text{ظا}^{-١}\sqrt{-\text{ر}^{٢} - ٤\text{ز}}/\text{ر}$. فاذا كان $-\text{ز} < ١$ فالحل $\text{س}_{\text{ن}}$ يقارب الصفر على نحو متأرجح وهذا ما يسمى بالحركة التوافقية المميزة المكبوحة......(انظر الشكل١).

واذا كان $-\text{ز}=١$ تنتج الحركة التوافقية التي رأيناها في المثال السابق

واخيراً اذا كان $-$ ز $>$ ١ فالح يتعاظم في حركة تأرجح تسمى حركة توافقية مميزة مدفوعة (انظر الشكل ٢)


الشكل (٢)


الشكل (١)

ومن الممتع ان نرى انه حتى في هذين النموذجين البسيطين تعتمد طبيعة الحل بشكل حاسم على الأهمية النسبية للسكان في الجيلين السابقين.

التمارين:

في التمارين من ١ إلى ٤ أوجد الحل العام لكل معادلة فرق. واذا اعطيت شروطاً ابتدائية فأوجد الحل الوحيد الذي يحققها:

١. $ص_{ن+٢} - \sqrt{٢}\, ص_{ن+١} + ص_{ن} = ٠$

٢. $ص_{ن+٢} - ٢ ص_{ن+١} + ٢ ص_{ن} = ٠$ ، $ص_{٠} = ١$، $ص_{١} = ٢$

٣. $ص_{ن}+٢ + ٨\, ص_{ن} = ٠$

٤. $ص_{ن+٢} - ٢ ص_{ن+١} + ٤ ص_{ن} = ٠$ ، $ص_{٠} = ٠$، $ص_{١} = ١$

٥. ابحث في خصائص الحل في كل من المعادلتين التاليتين باعتبارها حالة خاصة من نموذج نمو السكان في المثال السابق.

أ) $س_{ن+2} = س_{ن+1} + \frac{1}{2} س_ن$ ب) $س_{ن+2} = س_{ن+1} - \frac{1}{2} س_ن$

٦. إليك هذا التكامل $ك_ن(\theta) = \int_{\cdot}^{\pi} \frac{\text{جتا ن س} - \text{جتا ن}\theta}{\text{جتا س} - \text{جتا}\theta}$ دس.

أ) بين ان $ك_{ن+2}(\theta) = 2\,\text{جتا}\theta\, ك_{ن+1}(\theta) + ك_ن(\theta) = 0$

ب) حل هذه المعادلة وأوجد تعبيراً صريحاً يعطي $ك_ن(0)$

[ارشاد: من الضروري ان نجد أولاً القيمتين الابتدائيتين $ك_.(0)$، $ك_1(0)$]

٧. درسنا سابقاً معادلة ركافي اللاخطية، ذات الرتبة الأولى

$ص_ن ص_{ن-1} + أ_ن ص_ن + ب_ن ص_{ن-1} = جـ_ن$

فبتعويض $ص_ن = س_ن / س_{ن+1} - ب_ن$ بين ان هذه المعالدة تصبح:

$(أ_ن ب_ن + جـ_ن) س_{ن+1} - (أ_ن - ب_{ن-1}) س_ن - س_{ن-1} = 0$

استخدم نتائج التمرين ٧ في ايجاد الحل العام لمعادلات الفروق في التمارين ٨ إلى ١٢.

٨. $ص_ن ص_{ن-1} + 2ص_ن - 3ص_{ن-1} = 2$

٩. $ص_ن ص_{ن-1} - ص_ن - ص_{ن-1} = 1$

١٠. $ص_ن ص_{ن-1} + ص_ن + ص_{ن-1} = 1$

١١. $4ص_ن ص_{ن-1} + 6ص_ن - 3ص_{ن-1} = 0$

١٢. $2ص_ن ص_{ن-1} + 2ص_ن + 4ص_{ن-1} = -5$

استعمل طريقة التمرين (١٤) ونتائج هذا البند لايجاد الحل العام لكل معادلة فروق في التمارين التالية:

١٣. $ص_{ن+٣} - ٢ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ٢ص_{ن} = ٠$

١٤. $ص_{ن+٣} - ص_{ن+١} + \sqrt{٢}\,ص_{ن} = ٠$

١٥. $ص_{ن+٣} - ص_{ن+٢} + ص_{ن+١} - ص_{ن} = ٠$

١٦. $ص_{ن+٣} - ٨ص_{ن+٢} + ٨ص_{ن+١} - ٦٤ص_{ن} = ٠$

١٧. $ص_{ن+٣} + ٤ص_{ن+٢} - ٨ص_{ن+١} + ٢٤\,ص_{ن} = ٠$

* المعادلات اللامتجانسة:

تغيير الثوابت

هنالك طريقتان لحل معادلات الفروق اللامتجانسة: المعاملات غير المعنية وتغير الثوابت، وهما يناظران طرق حل المعادلات التفاضلية اللامتجانسة، وفي هذا البند ندرس طريقة تغير الثوابت، وهي طريقة بالغة الأثر، واما طريقة المعاملات غير المعينة فنناقشها في التمارين، فكما في المعادلات التفاضلية، تغتبران للمعادلة:

$ص_{ن+٢} + أ_{ن}\,ص_{ن+١} + ب_{ن}\,ص_{ن} = ق_{ن}،\ ب_{ن} \neq ٠$ ....(٣٥)

حلاً بالصيغة $ع_{ن} = ج_{ن}\,س_{ن} + د_{ن}\,ص_{ن}$ ....(٣٦)

حيث $س_{ن}$، $ص_{ن}$ حلان مستقلان خطياً، للمعادلة المتجانسة. فمن المعادلة (٣٦) ينتج أن:

$ع_{ن+١} = جـ_{ن+١}\, س_{ن+١} + د_{ن+١} ص_{ن+١}$ فبجمع وطرح $جـ_{ن}\, س_{ن+١}$، $د_{ن}\, ص_{ن+١}$ ينتج:

$$ع_{ن+١}=جـ_{ن}\, س_{ن+١}=د_{ن}ص_{ن+١} +(جـ_{ن+١} - جـ_{ن})س_{ن+١}+(د_{ن+١}-د_{ن})\, ص_{ن+١} \quad ......(٣٧)$$

ومن المناسب ان نعتبر، كأحد شرطين يلزم تحديدهما لايجاد $جـ_{ن}$، $د_{ن}$، ان

$$(جـ_{ن+١} - جـ_{ن})\, س_{ن+١} + (د_{ن+١} - د_{ن})\, ص_{ن+١} = ٠ \quad ......(٣٨)$$

لكن ن. وهذا الشرط يطابق شرط معادلة سابقة في المعادلات التفاضلية.

فيكون $ع_{ن+١} = جـ_{ن}\, س_{ن+١} + د_{ن}\, ص_{ن+١}$ ......(٣٩)

، $ع_{ن+٢} = جـ_{ن+١}\, س_{ن+٢} + د_{ن+١}\, ص_{ن+٢}$ ......(٤٠)

فاذا اعتبرنا $ع_{ن}$ حلا للمعادلة (٣٥) ينتج ان $ق_{ن}=ع_{ن+٢} + أ_{ن}\, ع_{ن+١} + ب_{ن}\, ع_{ن}$

$$= (جـ_{ن+١} - جـ_{ن})\, س_{ن+٢} + (د_{ن+١} - د_{ن})\, ص_{ن+٢} + جـ_{ن}\, [س_{ن+٢} + أ_{ن}\, س_{ن+١} + ب_{ن}\, س_{ن}] + د_{ن}\, [ص_{ن+٢} + أ_{ن}\, ص_{ن+١} + ب_{ن}\, ص_{ن}] \quad ......(٤١)$$

وما في الحاصرتين، في المعادلة (٤١) قيمته صفر، لأن $س_{ن}$، $ص_{ن}$ حلان للمعادلة (٣٥). فيبقى لدينا الشرط الثاني، الذي يتحقق لكل ن، وهو:

$$(جـ_{ن+١} - جـ_{ن})\, س_{ن+٢} + (د_{ن+١} - د_{ن})\, ص_{ن+٢} = ق_{ن} \quad ......(٤٢)$$

فبضم (٤٢) و(٣٨) نحصل على المنظومة التالية بالمجهولين $(جـ_{ن+١} - جـ_{ن})$ و$(د_{ن+١} - د_{ن})$:

$$(\text{ج}_{\text{ن}+1} - \text{ج}_{\text{ن}})\,\text{س}_{\text{ن}+1} + (\text{د}_{\text{ن}+1} - \text{د}_{\text{ن}})\,\text{ص}_{\text{ن}+1} = 0$$
$$(\text{ج}_{\text{ن}+1} - \text{ج}_{\text{ن}})\,\text{س}_{\text{ن}+2} + (\text{د}_{\text{ن}+1} - \text{د}_{\text{ن}})\,\text{ص}_{\text{ن}+2} = \text{ق}_{\text{ن}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (43)$$

ومحددة هذه المنظومة، أي $\text{ں}_{\text{ن}+1}(\text{س}، \text{ص})$ ليست صفراً، وذلك حسب النظرية (٤)، فيكون:

$$\text{ج}_{\text{ن}+1} - \text{ج}_{\text{ن}} = \frac{\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{ص}_{\text{ن}+1}}{\text{ں}_{\text{ن}+1}(\text{س}،\text{ص})} \quad ، \quad \text{د}_{\text{ن}+1} - \text{د}_{\text{ن}} = \frac{\text{ق}_{\text{ن}}\,\text{س}_{\text{ن}+1}}{\text{ں}_{\text{ن}+1}(\text{س}،\text{ص})} \ldots\ldots (44)$$

والمعادلتان (٤٤) هما معادلتا فرق بالمجهولين $\text{ج}_{\text{ن}}$، $\text{د}_{\text{ن}}$، ويمكن حلهما بالمعادلة (٦٦)، فينتج

$$\text{ج}_{\text{ن}} = \text{ج}_0 - \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}-1} \frac{\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}+1}}{\text{ں}_{\text{ك}+1}(\text{س}،\text{ص})} \quad ، \quad \text{د}_{\text{ن}} = \text{د}_0 + \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}-1} \frac{\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{س}_{\text{ك}+1}}{\text{ں}_{\text{ك}+1}(\text{س}،\text{ص})}$$

والحل العام للمعادلة (٣٥) هو:

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{ج}_0\,\text{س}_{\text{ن}} + \text{د}_0\,\text{ص}_{\text{ن}} - \text{س}_{\text{ن}} \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}-2} \frac{\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}+1}}{\text{ں}_{\text{ك}+1}(\text{س}،\text{ص})} + \text{ص}_{\text{ن}} \sum_{\text{ك}=0}^{\text{ن}-2} \frac{\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{س}_{\text{ك}+1}}{\text{ں}_{\text{ك}+1}(\text{س}،\text{ص})} ،\ldots (45)$$

حيث ج_0، د_0 ثابتان اعتباطيان.

المثال (١):

حل $\text{ص}_{\text{ن}+2} - 3\text{ص}_{\text{ن}+1} + 2\text{ص}_{\text{ن}} = 1 + 5^{\text{ن}+1}$ ……………………(٤٦)

جذرا المعادلة المساعدة هما $\lambda = 1، 2$، فللمعادلة المتجانسة جذران مستقلان هما $\text{س}_{\text{ن}} = 1$، $\text{ص}_{\text{ن}} = 2^{\text{ن}}$ فالقيسارية.

$$\text{ق}_{\text{ن}+1}(\text{س}،\text{ص}) = \text{س}_{\text{ن}+1}\,\text{ص}_{\text{ن}+2} - \text{س}_{\text{ن}+2}\,\text{ص}_{\text{ن}+1} = 2^{\text{ن}+2} - 2^{\text{ن}+1} = 2^{\text{ن}+1} \quad ، \quad \text{ق}_{\text{ن}} = 1 + 5^{\text{ن}+1}$$

نعوض هذه القيم في حدود المعادلة (٤٥) فنجد مايلي:

$$\sum_{\text{ك}=\text{٠}}^{\text{ن}-\text{٢}} \frac{\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{ص}_{\text{ك}+\text{١}}}{\text{و}_{\text{ك}+\text{١}}(\text{س،ص})} = \sum_{\text{ك}=\text{٠}}^{\text{ن}-\text{٢}} (\text{١}+\text{٥}^{\text{ك}+\text{١}}) = \text{ن} + \frac{\text{٥}^{\text{ن}}}{\text{٤}} - \frac{\text{٩}}{\text{٤}}، \quad \text{..................... (٤٧)}$$

$$\sum_{\text{ك}=\text{٠}}^{\text{ن}-\text{٢}} \frac{\text{ق}_{\text{ك}}\,\text{س}_{\text{ك}+\text{١}}}{\text{و}_{\text{ك}+\text{١}}(\text{س،ص})} = \sum_{\text{ك}=\text{٠}}^{\text{ن}-\text{٢}} \left[\left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{ك}+\text{١}} + \left(\frac{\text{٥}}{\text{٢}}\right)^{\text{ك}+\text{١}}\right] = \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\left(\frac{\text{٥}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن}} - \left(\frac{\text{١}}{\text{٢}}\right)^{\text{ن}-\text{١}} - \frac{\text{٢}}{\text{٣}}،$$

حسب القاعدة $\text{أ} + \text{أ}^{\text{٢}} + \text{أ}^{\text{٣}} + \ldots\ldots + \text{أ}^{\text{ن}-\text{١}} = \dfrac{\text{أ} - \text{أ}^{\text{ن}}}{\text{١} - \text{أ}}$

فنعوض من هذه القيم في المعادلة (٤٥)، ونجمع الحدود المتشابهة ونضم المعاملات الثابتة إلى جـ، د. فينتج الحل العام للمعادلة (٤٦)، وهو:

$$\text{ع}_{\text{ن}} = \text{جـ} + \text{د.}\ \text{٢}^{\text{ن}} - \text{ن} + \frac{(\text{٥})^{\text{ن}+\text{١}}}{\text{١٢}}$$

المثال (٢):

خذ المعادلة $\text{ص}_{\text{ن}+\text{٢}} + \text{ص}_{\text{ن}} = \text{ن}+\text{١}$ .... (٤٨)

جذرا المعادلة المساعدة ± ي. فمن النظرية (٩) يكون حلا المعادلة المتجانسة المستقلان. $\text{س}_{\text{ن}} = \text{جتا}\,\text{ن}\pi/\text{٢}$، $\text{ص}_{\text{ن}} = \text{جا}\,\text{ن}\pi/\text{٢}$ (انظر المثال (٢) في البند السابق) والقيسارية:

$$\text{ق}_{\text{ن}+\text{١}}(\text{س، ص}) = \text{جتا}\,\frac{(\text{ن}+\text{١})\pi}{\text{٢}}\ \text{جا}\,\frac{(\text{ن}+\text{٢})\pi}{\text{٢}}$$

$$-\ \text{جا}\,\frac{(\text{ن}+\text{١})\pi}{\text{٢}}\ \text{جتا}\,\frac{(\text{ن}+\text{٢})\pi}{\text{٢}} = \text{جا}\,\frac{\pi}{\text{٢}} = \text{١}$$

فيكون $\text{جـ}_{\text{ن}} = \text{جـ}_{\text{٠}} - \sum_{\text{ك}=\text{٠}}^{\text{ن}-\text{١}} (\text{ك}+\text{١})\ \text{جا}\,\dfrac{(\text{ك}+\text{١})\pi}{\text{٢}}$

= جـ -١ + ٣ – ٥ +......– ن جانπ/ ٢.........................(٤٩)

$د_{ن} = د_{٠} + \sum_{ك=٠}^{ن-١} (ك+١)\ \text{جتـــــــــــــــــا}\ \frac{(ك+١)\pi}{٢} = د_{٠} -٢+٤-٦ +....+ن$
جتانπ/ ٢.....(٥٠)

لاحـظ أن $جـ_{٢م} = جـ_{٢م-١} = جـ_{٠} + (-١)^{م}$، وان $د_{٢م+١} = د_{٠} + (-١)^{م}(م+١) -١$،

فيكون الحل العام للمعادلة (٤٨) هو $ع_{ن} = جـ_{ن}\ \text{جتا}\ \frac{ن\pi}{٢} + د_{ن}$ جانπ/ ٢،

حيث $جـ_{ن}$، $د_{ن}$ كما ذكرنا. لاحظ ان هـذه العبـارة تنطـوي علـى $جـ_{٠}$، $د_{٠}$ كثابتين.

المثال (٣):

حل $ص_{ن+٢} - (ن+٢)(ن+١)\ ص_{ن} = (ن+٣)!$.....................(٥١)

رأينا في مثال سابق ان المعادلة المتجانسة لها حلان مستقلان همـا $س_{ن}=ن!$، $ص_{ن} = (-١)^{ن}\ ن!$ وبعملية حسابية بسيطة نجد ان القيسارية.

$ى_{ن+١}(س،ص) = ٢\ (-١)^{ن}\ (ن+١)!\ (ن+٢)!$ فحدود المعادلة (٤٥) هي:

$$\sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك}\ ص_{ك+١}}{ى_{ك+١}(س،ص)} = \frac{-١}{٢}\ [٣+٤+.....+(ن+١)] = \frac{٣}{٢} - \frac{(ن+١)\ (ن+٢)}{٤}$$

$$\sum_{ك=٠}^{ن-٢} \frac{ق_{ك}\ س_{ك+١}}{ى_{ك+١}(س،ص)} = \frac{١}{٢}\ [٣-٤+٥-٦+..............+(-١)^{ن}(ن+١)]$$

$= \frac{(-١)^{ن}}{٢}\ ([\frac{ن}{٢}] + ١+(-١)^{ن})$، حيث $[\frac{ن}{٢}]$ تعني العدد الصحيح من $\frac{ن}{٢}$

وعلى الطالب ان يتحقق من هذه المعادلة الأخيرة. فبضم الثوابت إلى جـ، د. وجمع الحدود المتشابهة ينتج ان الحل العام للمعادلة (٥١)، وهو:

$$ع_ن = جـ\ ن! + د.\ (-1)^ن\ ن!\ (\frac{ن^2}{4} + \frac{3ن}{4} + \frac{1}{2}[\frac{ن}{2}])$$

التمارين:

استعمل طريقة تغيير الثوابت في ايجاد حل خاص لمعادلات التمارين ١ إلى ٥

١. $ص_{ن+2} - 5ص_{ن+1} + 6ص_ن = 5^{ن+1}$

٢. $ص_{ن+2} + ص_{ن+1} - 6ص_ن = هـ^{ن+1} + 3هـ^ن$

٣. $ص_{ن+2} - 4ص_{ن+1} + 4ص_ن = ن2^ن$

٤. $ص_{ن+2} - 2ص_{ن+1} + ص_ن = 2^ن$

٥. $ص_{ن+2} + 5ص_ن = جا\ ن\ \pi/2$

في التمارين التالية سنستنتج حل معادلات الفروق بطريقة المعاملات غير المعينة، وهي اسهل من طريقة تغيير الثوابت، ولكنها تصح فقط عندما يكون $أ_ن = أ$، $ب_ن = ب$، اي ثابتين (لكل ن) ويكون $ق_ن$ واحداً من الأشكال الثلاثة التالية او اي تجميع لها:

$$ع_ن = ل.\ أ^ن،\ ل_1 جا\ جـن + ل_2\ جتا\ جـن،\ ل. + ل_1\ ن + ...\ ل_ك\ ن^ك$$

فبعد ايجاد الحلول المستقلة للمعادلة المتجانسة، نبدأ كما يلي: نكتب $ع_ن$ بمثل شكل $ق_ن$ وبمعاملات $ل_ر$ غير محددة.

i) فاذا لم يكن حد من $ع_ن$ في حلول المعادلة المتجانسة، نعوض $ع_ن$ بدل $ص_ن$ في المعادلة.

ص$_{ن+٢}$ + أص$_{ن+١}$+ب ص$_{ن}$ = ق$_{ن}$..............................(٥٢)

ونحل لإيجد المعاملات ل$_ر$.

ii) والا فنضرب ع$_ن$ بأصغر قوة صحيحة للعدد ن بحيث لا يكون اي حد من الناتج حداً في حل المعادلة المتجانسة ثم نكمل كما في (i) (مثلاً: إذا كان حلاً للمعادلة المتجانسة ٣^ن، ن٣^ن وكان ق$_ن$ = ٣^ن، نضرب ع$_ن$ في ن^٢ حتى يصير ع$_ن$ = ل ن^٢ ٣^ن وهذا ليس حلاً للمعادلة المتجانسة،

٦. خذ ع$_ن$ = ل. ٥^ن وبين ان المعادلة في التمرين (١) حلها العام

$$ص_ن = جـ_٠\ ٢^ن + جـ_١\ ٣^ن + \frac{١}{٦}\ (٥)^{ن+١}$$

٧. حل معادلة التمرين (٢) بطريقة المعاملات غير المعينة.

٨. حل معادلة التمرين (٤) بطريقة المعاملات غير المعينة.

٩. حل معادلة التمرين (٥) بطريقة المعاملات غير المعينة.

١٠. حل ص$_{ن+٢}$ − ٤ص$_{ن+١}$ + ٤ص$_ن$ = ٢^ن بطريقة المعاملات غير المعنية

في التمارين التالية أوجد الحل العام لكل معادلة بأي واحدة من الطريقتين، في بعض الحالات قد يفيد استعمال مبدأ التراكم (انظر التمرين ٤-٢-٦).

١١. ص$_{ن+٢}$ − ٣ص$_{ن+١}$ + ٢ص$_ن$ = ٢^ن + ٢$^{-ن}$

١٢. ص$_{ن+٢}$ −ص$_{ن-١}$ − ٦ص$_ن$ = ن+٣^ن

١٣. ص$_{ن+٢}$ + ص$_ن$ = جان

١٤. $ص_{ن+٣} - ٦ص_{ن+٢} + ١١ص_{ن+١} - ٦ص_{ن} = ٢^{ن}$

١٥. $ص_{ن+٣} - ٢ص_{ن+٢} + ٣ص_{ن} = جتا ن\pi/٢$

١٦. $ص_{ن+٣} + ص_{ن+٢} - ٢ص_{ن} = ن + ن^{٢} + ن^{٣}$

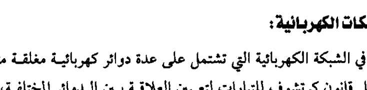
١٧. $ص_{ن+٢} - ص_{ن+١} - ص_{ن} = ن^{٢} + ١$

١٨. $ص_{ن+٢} + ٢ص_{ن+١} + ص_{ن} = ٢^{ن} + ٣^{ن} + ٤^{ن}$

*** الشبكات الكهربائية:**

في الشبكة الكهربائية التي تشتمل على عدة دوائر كهربائية مغلقة متصلة نستعمل قانون كرتشوف للتيارات لتعيين العلاقة بين الدوائر المختلفة، وهو ينص على ما يلي:

التيارات المتجهة نحو أي مفرق في الشبكة مجموعها الجبري صفر وباستعمال هذا القانون وقانون كرتشوف للفولتية، انظر مثلا الشبكة المبينة بالشكل (٣) حيث تشير $ق_{ى}$ إلى الفولتية بالنسبة إلى الأرض في النقطة ي، ويشير الجزء المظلل إلى الأرض (حيث الفولتية صفر). ونفترض ان $ق_{٠}$ ثابت وان كل المقاومات= و وان $ق_{ن} = ٠$ والغرض من الدراسة التالية ان نحصل على معادلة فرق تعطي $ق_{ك}$.



فحسب قانون كيرتشوف للتيار نجد أن $\text{ت}_{\text{ك}} = \text{ت}'_{\text{ك}} + \text{ت}_{\text{ك}+١}$ ....(٥٣)

لكل قيم ك الصحيحة حيث $١ \leq \text{ك} \leq \text{ن} - ١$ وحسب قانون أوم، نكتب المعادلة (٥٣) على النحو التالي.

$\dfrac{\text{ق}_{\text{ك}-١} - \text{ق}_{\text{ك}}}{\text{و}} = \dfrac{\text{ق}_{\text{ك}}}{\text{و}} + \dfrac{\text{ق}_{\text{ك}} - \text{ق}_{\text{ك}+١}}{\text{و}}$ وبعد المعالجة الجبري:

$\text{ق}_{\text{ك}+١} - ٣\text{ق}_{\text{ك}} + \text{ق}_{\text{ك}+١} = ٠$ ....(٥٤)

والمعادلة المساعدة لهذه جذراها $(٣ \pm \sqrt{٥})/٢$، فالحل العام للمعادلة (٥٤) هو:

$\text{ق}_{\text{ك}} = \text{جـ}_{٠}\left(\dfrac{٣+\sqrt{٥}}{٢}\right)^{\text{ك}} + \text{جـ}_{١}\left(\dfrac{٣-\sqrt{٥}}{٢}\right)^{\text{ك}}$ ....(٥٥)

ولأن ق. ثابت معلوم، $\text{ق}_{\text{ن}} = ٠$، تنتج المعادلتان الآتيتان:

$\text{جـ}_{٠} + \text{جـ}_{١} = \text{ق}_{٠}$،

$\text{جـ}_{٠}\left(\dfrac{٣+\sqrt{٥}}{٢}\right)^{\text{ن}} + \text{جـ}_{١}\left(\dfrac{٣-\sqrt{٥}}{٢}\right)^{\text{ن}} = ٠$

فينتج أن $\text{جـ}_{١} = \text{جـ}_{٠}\left(\dfrac{٣+\sqrt{٥}}{٢}\right)^{٢\text{ن}}$ ، $\text{جـ}_{٠} = \dfrac{\text{ق}_{٠}}{١ - \left[(٣+\sqrt{٥})/٢\right]^{٢\text{ن}}}$ لاحظ أن

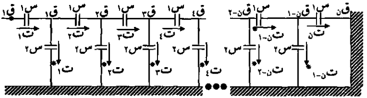
$\left(\dfrac{٣+\sqrt{٥}}{٢}\right)\left(\dfrac{٣-\sqrt{٥}}{٢}\right) = ١$، فيكون $\text{ق}_{\text{ك}} = \text{ق}_{٠}$.

$$\frac{\left[(٣+\sqrt{٥})/٢\right]^{٢\text{ن}-\text{ك}} - \left[(٣+\sqrt{٥})/٢\right]^{\text{ك}}}{\left[(٣+\sqrt{٥})/٢\right]^{٢\text{ن}} - ١}$$

وتنشأ مسألة مماثلة اذا استبدلنا بكل مقاومة في الشكل (٣) مواسعة، كما

في الشكل (٤) وجعلنا الخط يمر به تيار متبال [أي ان ق. (ن) اقتران دوري]. وهذا النوع من الشبكات يسمى بالعازل الوتري فلتكن المواسعة بين اي موصلين متتالين س١، والمواسعة بالنسبة للأرض س٢، فتصير المعادلة (٥٣):

$$\text{س}_{١}\,\frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\text{ق}_{\text{ك}+١}-\text{ق}_{\text{ك}}\right)=\text{س}_{٢}\,\frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\text{ق}_{\text{ك}}\right)+\text{س}_{١}\,\frac{\text{د}}{\text{دن}}\left(\text{ق}_{\text{ك}}-\text{ق}_{\text{ك}+١}\right)\text{.......(٥٧)}$$



الشكل (٤)

لأن $\text{ت} = \text{د ش}/\text{دن}$، $\text{ق}_{\text{س}} = \text{ش}/\text{س}$.

فلتكن $\text{أ} = \text{س}_{٢}/٢\text{س}_{١}$ ولنمضي كما مضينا سابقاً فينتج:

$$\text{قَ}_{\text{ك}}=\text{قَ}_{.}\,\frac{\left(١+\text{أ}+\sqrt{٢\text{أ}+\text{أ}^{٢}}\right)^{\text{ك}}-\left(١+\text{أ}+\sqrt{٢\text{أ}+\text{أ}^{٢}}\right)^{٢\text{ن}-\text{ك}}}{\left(١+\text{أ}+\sqrt{٢\text{أ}+\text{أ}^{٢}}\right)^{٢\text{ن}}-١}=\text{قَ}_{.}\,\frac{\text{جا أ(ن}-\text{ك)}}{\text{جا أن}}$$

حيث $\text{هـ}^{\text{أ}} = ١ + \text{أ} + \sqrt{٢\text{أ}+\text{أ}^{٢}}$ ، $\text{جتا ص} = (\text{هـ}^{\text{ص}} - \text{هـ}^{-\text{ص}})/٢$

فتكون الفولتية عند المفرق ك:

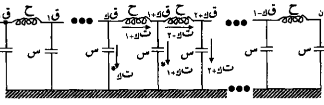
$$\text{ق}_{\text{ك}}=\text{ق}_{.}\,\frac{\text{جا (أ(ن}-\text{ك)}}{\text{جا أن}}=\text{ل}\,\frac{\text{جا أ(ن}-\text{ك)}}{\text{جا أن}}\,\text{جتا ون}\text{،.................(٥٩)}$$

حيث $\text{ق}_{.} = \text{ل جتا ون}$. [وقد حصلنا على المعادلة (٥٩) بمكاملة طرفي المعادلة (٥٨) علماً بأن $\frac{\text{جا أ(ن}-\text{ك)}}{\text{جا أن}}$ ثابت بالنسبة إلى الزمن ن].

والشبكة المبنية بالشكل (٥) تسمى بالمصفاة الخافضة لأنها تعزل كل موجة فوق حد معين من التردد. ولبيان ذلك نكتب المعادلة (٥٣) بالشكل:

$\frac{ق_{ك} - ق_{ك+١}}{ح} = ح \frac{د^{٢}}{دن^{٢}} ق_{ك+١} + \frac{ق_{ك+١} - ق_{ك+٢}}{ح}$ ، حيث $٠ \leq ك \leq ن-٢$، أي أن $ق_{ك+٢} - ٢ق_{ك+١} + ق_{ك} = س_{ح}\, \ddot{ق}_{ك+١}$........(٦٠).

نفترض الآن إلى التيار في الحظ متبادل وأن $ق_{ك} = ل_{ك}$ جتا ون، حيث و تردد ما محدد.



الشكل (٥)

فنعوض ذلك في المعادلة (٦٠) ونحذف المضاعف المشترك جتا ون، فينتج:

$ل_{ك+٢} - (٢ - \alpha^{٢})\, ل_{ك+١} + ل_{ك} = ٠$،..............................(٦١)

حيث $\alpha^{٢} = و^{٢}$ س ح > ٠.... والمعادلة المساعدة جذراها.

$١ - \frac{\alpha^{٢}}{٢} \pm \sqrt{(١ - \frac{\alpha^{٢}}{٢})^{٢} - ١}$..(٦٢)

الحالة (١):

اذا كان $|١ - \alpha^{٢}/٢| < ١$ نضع جتا $\mu = ١ - \alpha^{٢}/٢$ (فيكون $٠ < \mu < \pi$)

فتصبح المعادلة (٦٢)

جتا μ ± ي جا μ = هـ$^{\pm يع}$

فالحل العام للمعادلة (٦١) هو

ل$_{ك}$ = جـ$_{٠}$ جتا ك μ + جـ$_{١}$ جا ك μ، لكل ٠ $\geq$ ك $\geq$ ن............(٦٣)

والآن نريد أن نجد الثابتين جـ$_{٠}$، جـ$_{١}$. فهناك شرطان اضافيان يتحققان في شبكة الشكل (٥).

$$\frac{ق_{٠}-ق_{١}}{ح} + س\, ق'_{٠} = ٠ ،\quad \frac{ق_{ن-١}-ق_{ن}}{ح} - جـ\, ق'_{ن} = ٠$$

عند المفرقين الأول والأخير. وهاتان المعادلتان تفضيان إلى:

(١ − $\propto^{٢}$) ل$_{٠}$ − ل$_{١}$ = ٠ ، ل$_{ن-١}$ − (١ − $\propto^{٢}$) ل$_{ن}$=٠.................(٦٤)

نطبق (٦٣) على (٦٤)، فينتج بعد خطوات منظومة متجانسة هي:

(١ − جتاμ) جـ$_{٠}$ + (جا μ) جـ$_{١}$=٠، ....(٦٥)

[جتا ن μ − جا(ن+١) μ] جـ$_{٠}$ + [جانμ − جا(ن+١) μ]جـ$_{١}$= ٠

وهنا استعملنا المتطابقات: $\propto^{٢}$= ٢(١ − جتاμ)،

٢جتا نμ جتاμ = جتا (ن+١) μ + جتا(ن−١)μ،

٢جا نμ جتاμ = جا (ن+١) μ + جا(ن−١)μ.

ويكون للمعادلة (٦٥) حل غير عاطل يعطي قيمتين جـ$_{٠}$، جـ$_{١}$ اذا وفقط اذا كان:

= جا (ن+٢)μ − ٢جا(ن+١)μ+ جان μ

$$\begin{vmatrix} \text{جاμ} & \text{١- جتاμ} \\ \text{جا(ن+١)μ} & \text{جتانμ - جتا(ن+١)μ} \end{vmatrix} = -\text{٤جا}^{٢}\frac{\mu}{٢}\ \text{جا(ن+١)}\ \mu = ٠$$

والآن: جا $\frac{\mu}{٢}$ = ٠ فقط اذا كان μ من مضاعفات ٢π، وهذا مستحيل لأن π > ع > ٠

فيكون جا(ن+١)μ = ٠ وهذا يعني أن $\mu = \frac{\text{م}\pi}{\text{ن+١}}$ ، م= ١، ٢، ٣،....،ن

فيكون س ح و^{٢} = $\alpha^{٢}$ = ٢ (١- جتا $\frac{\text{م}\pi}{\text{ن+١}}$) = ٤ جا^{٢} $\frac{\text{م}\pi}{\text{٢ن+١}}$ وهذا يعني ان الترددات الطبيعية لهذه الشبكة هي:

$$\text{و}_{\text{م}} = \frac{٢}{\sqrt{\text{س ح}}}\ \text{جا}\ \frac{\text{م}\pi}{\text{٢ن+١}}\text{، م = ١، ٢، ٣،.....،ن}\qquad(٦٦)$$

فكل تردد أعلى من $\text{و}_{\text{ن}}$ (> ٢/ $\sqrt{\text{حس}}$) يخفض بمرور الوقت واخيرا، بعمليات حسابية قليلة نبين ان الفولتية:

$$\text{ق}_{\text{ك}} = \text{جـ}\ \frac{\text{جتا}[(\text{٢ك+١})\text{م}\pi/\text{٢(ن+١)}]}{\text{جتا}[\text{م}\pi/(\text{٢(ن+١)})]}\ \text{جتا و}_{\text{م}}\text{ن}\qquad(٦٧)$$

لكل ك= ٠، ١،......، ن ، م= ١، ٢، ٣،.....،ن.

الحالة (٢):

اذا كان |١- $\alpha^{٢}$/٢|≤١ ، فعندها لأن $\alpha^{٢}$> ٠ يكون ١- $\alpha^{٢}$/٢≥١ فاذا تساويا تكون $\alpha^{٢}$=٤ ويكون جذرا المعادلة المساعدة كلاهما -١. وهذا يعني أن $\text{ل}_{\text{ك}}$=($\text{جـ}_{٠}$ + $\text{جـ}_{١}$ ك) $(-١)^{\text{ك}}$ هو الحل العام للمعادلة (٦١). نطبق هذا الحل على الشروط الحاصرة (٦٤) نحصل على المنظومة المتجانسة:

٢$\text{جـ}_{٠}$ - $\text{جـ}_{١}$ = ٠

$٢\text{جـ}_. + (٢\text{ن} + ١)\,\text{جـ}_١ = ٠$ وهذا ليس لها سوى الحل العاطل $\text{جـ}_. = \text{جـ}_١ = ٠$

فتكون $\text{ق}_{\text{ك}} = ٠$ لكل ك. وهذا يخالف الغرض.

وإذا كان $١ - \propto^٢/٢ > -١$ ، كان $\propto^٢/٢ - ١ < ١$ وكان هناك $\mu > ٠$

حيث: $\frac{\propto^٢}{٢} - ١ = \frac{\text{هـ}^{\mu} + \text{هـ}^{-\mu}}{٢}$ فالمعادلة (٦٢) تصبح.

$\text{هـ}^{\pm ع}$ والمعادلة (٦١) يكون حلها العام $\text{ل}_{\text{ك}} = \text{جـ}_. \text{هـ}^{\text{ك}\mu} + \text{جـ}_١ \text{هـ}^{-\text{ك}\mu}$ نعوض هذا في شروط معادلتي (٦٤) فنحصل على المنظومة المتجانسة:

$$\text{جـ}_. (٢\text{هـ}^{\mu} + ١ + \text{هـ}^{-\mu}) + \text{جـ}_١ (\text{هـ}^{\mu} + ١ + ٢\text{هـ}^{-\mu}) = ٠ \text{ ،}$$

$$\text{جـ}_. \text{هـ}^{\text{ن}\mu} (\text{هـ}^{\mu} + ١ + ٢\text{هـ}^{-\mu}) + \text{جـ}_١ \text{هـ}^{-\text{ن}\mu} (٢\text{هـ}^{\mu} + ١ + \text{هـ}^{-\mu}) = ٠$$

فلكي نحصل على حل غير عاطل ينبغي ان تكون المحددة صفراً، أي أن:

$$\text{هـ}^{-\text{ن}\mu} (٢\text{هـ}^{\mu} + ١ + \text{هـ}^{-\mu})^٢ - \text{هـ}^{\text{ن}\mu} (\text{هـ}^{\mu} + ١ + ٢\text{هـ}^{-\mu}) = ٠ \quad \text{.....................(٦٨)}$$

$$\text{أي أن } \text{هـ}^{٤ع}\ \frac{(٢ + \text{هـ}^{ع} + \text{هـ}^{-٢ع})^٢}{٢ + \text{هـ}^{ع} + \text{هـ}^{٢ع}} = \text{هـ}^{٢\text{ن}ع} \quad \text{.................................(٦٩)}$$

وهذه ليس لها حل إذا كانت $\mu > ٠$

فليس هنالك سوى الحل العاطل للثابتين جـ.، جـ١ وهذا يخالف الفرض.

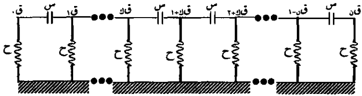
التمارين

١. استخرج (٦٩) من المعادلة (٦٨).

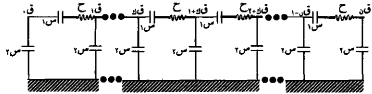
٢. ناقش الشبكة التي تنشأ من وضع حث ح بدل كل مقاومة في الشكل (٣).

٣. ادرس الشبكة المبينة بالشكل (٦)، المسماة بالمصفاة المرافقة بين أنها تستبعد كل موجة دون حد تردد معين.

٤. الشبكة المبينة بالشكل (٧) تسمى مصفاة حاصرة. لأنها تستبعد كل الأمواج غير المحصورة ضمن حدي تردد معينين أوجد هذين الحدين.



الشكل (٦)



الشكل (٧)

تطبيقات على الألعاب

وضبط النوعية

شخصان أ، ب يتباريان في لعبة، لاعلى التعيين، مرات متتالية بالتناوب. ولنفرض أنه في كل مرة يخرج واحد (نستبعد حالات التعادل). فليكن احتمال أن يربح أ هو جـ ($\neq$ ٠) واحتمال ان يربح ب هو خـ. وبالطبع جـ + خـ = ١. ولنفرض أن المربح والخسارة في كل مرة دينار واحد، وان أ بدأ ومعه ك ديناراً وان ب بدأ ومعه ق دينار. وليرمز $ح_{ن}$ إلى احتمال ان يربح أ كل ما مع ب عندما يكون مع أ مقدار ن ديناراً. فواضح ان $ح_{٠}$ = ٠ (وهذا هو احتمال أن يربح أ كل ما مع ب عندما لا يكون مع أ شيء)، وأن $ح_{ك+ق}$ = ١ (وذلك عندما يكون أ قد ربح كل ما مع ب). فلكي نحسب $ح_{ن}$ عندما تكون ن غير هاتين القيمتين، نضع معادلة الفرق التالية.

$ح_{ن} = خـ\, ح_{ن-١} + جـ\, ح_{ن+١}$ ....(٧٠)

ولفهم هذه المعادلة نذكر انه إذا كان أ معه ن ديناراً في مره ما فاحتمال أن يصير معه ن-١ ديناراً في المرة الثانية هو خـ، وبالمثل نفسر الحد الثاني في المعادلة (٧٠).

ولنكتب المعادلة (٧٠) بالصيغة التقليدية.

$جـ\, ح_{ن+١} - ح_{ن} + خـ\, ح_{ن-١} = ٠$

أي

$\text{ح}_{\text{ن}+2} - \frac{1}{\text{جـ}}\,\text{ح}_{\text{ن}+1} + \frac{\text{خـ}}{\text{جـ}}\,\text{ح}_{\text{ن}} = 0$ فالمعادلة المساعدة: $\lambda^2 - \frac{1}{\text{جـ}}\lambda + \frac{\text{خـ}}{\text{جـ}} = 0$،

وجذراها $\frac{1}{2\text{جـ}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\text{جـ}\text{خـ}}\right)$.........(٧٢)

ولأن $\sqrt{1 - 4\text{جـ}\text{خـ}} = \sqrt{1 - 4\text{جـ}(1-\text{جـ})} = \sqrt{4\text{جـ}^2 - 4\text{جـ} + 1} = |1 - 2\text{جـ}|$

نستنتج أن جذري المعادلة المساعدة هما $\lambda_1 = \frac{1-\text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{خـ}}{\text{جـ}}$، $\lambda_2 = 1$..........(٧٣)

فالحل العام للمعادلة (٧٠) هو اذن: $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{جـ}_1 \left(\frac{\text{خـ}}{\text{جـ}}\right)^{\text{ن}} + \text{جـ}_2$ ....(٧٤)

عندما $\text{جـ} \neq \text{خـ}$. هو $\text{ح}_{\text{ن}} = \text{خـ}_1 + \text{جـ}_2\,\text{ن}$............................(٧٥)

عندما $\text{جـ} = \text{خـ} = \frac{1}{2}$ (حسب قاعدة الجذر المكرر).

فإذا ذكرنا أن $0 \leq \text{ح}_{\text{ن}} \leq 1$ لكل ن، وذكرنا الشرطين الحاضرين $\text{ح}_0 = 0$، $\text{ح}_{\text{ك}+\text{ق}} = 1$ نجد في النهاية أن

$\text{ح}_{\text{ن}} = \frac{1 - (\text{خـ}/\text{جـ})^{\text{ن}}}{1 - (\text{خـ}/\text{جـ})^{\text{ك}+\text{ق}}}$، إذا كان $\text{جـ} \neq \text{خـ}$..........................(٧٦)

و $\frac{\text{ن}}{\text{ك}+\text{ق}}$ إذا كان $\text{جـ} = \text{خـ} = \frac{1}{2}$ ......(٧٧) لكل ن حيث $0 \leq \text{ن} \leq \text{ك}+\text{ق}$

المثال (١):

في لعبة دواليب الحظ أخذ لاعب يباري النادي، كل مرة بدينار، يرح مثله إذا وقف الخط عند رقعة حمرا، وكان الدولاب يدور حول ١٨ ورقة حمراء و١٨ سوداء ورقعتين على احداهما صفر وعلى الاخرى صفران. فإذا جرى الدولاب

حمراً فان احتمال ان يكون النادي هو الرابح هو جـ = $\frac{٢٠}{٣٨}\approx$ ٠,٥٢٦٣ فيكون خـ = ٠,٤٧٣٧ ويكون خـ/ جـ = ٠,٩ فإذا بدأ كل من اللاعب والنادي بمبلغ ك ديناراً، فاحتمال افلاس اللاعب =

$$ح_ك = \frac{١-(خـ/جـ)^ك}{١-(خـ/جـ)^{٢ك}} = \frac{١}{١+(خـ/جـ)^ك} = \frac{١}{١+(٠,٩)^ك}$$

والعمود الثاني من الجدول (١) يبين كيف يتغير احتمال افلاس اللاعب بتغير ك، أي المبلغ الذي يكون معه عند بدء اللعب. لاحظ انه كلما زاد المبلغ الذي يبدآن به يزداد احتمال افلاس اللاعب. وواضح انه كلما استمر اللاعب في اللعب كلما تأكد افلاسه. لذا فإن أبسط اجرار في صالح النادي يضمن في كل حال تقريباً، افلاس اللاعب إذا هو استمر في اللعب.

الجدول (١)

ك	حك	ح * ك
١	٠,٥٢٦٣	٠,٥٢٦٣
٥	٠,٦٢٨٧	٠,٨٧٤٠
١٠	٠,٧٤١٥	٠,٩٤٩٥
٢٥	٠,٩٣٣٠	٠,٩٩٢٣
٥٠	٠,٩٩٤٩	٠,٩٩٩٥
١٠٠	٠,٩٩٩٩	٠,٩٩٩٩

والعمود الثالث في الجدول يبين احتمال خسارة اللاعب إذا لعب بدينار واحد، ومع النادي ك ديناراً، فهنا:

$$ح^*_ك = \frac{١-(خـ/جـ)^ك}{١-(جـ/خـ)^{ك+١}}$$

فاذا كان مع اللاعب اقل بكثير مما مع النادي زاد احتمال افلاسه، وعلى هذا فإن إجراء يسيراً في صالح النادي، بالإضافة إلى قيود اللعب وزيادة رصيد النادي، تجعل إدارته عمليه وامره الربح.

المثال (٢):

يمكن اتخاذ المثال السابق نموذجاً بسيطاً للصراع على مصادر الغذاء بين نوعين من الأحياء في بيئة معزولة.

إفرض أن نوعين من أ، ب انفردا في بيئة فيها ن وحدات من المصادر. كالمراعي أو الأشجار أو سراها. فإذا كان النوع أ يحكم على ك وحدات فإن النوع ب يحكم على ن – ك وحدات ولنفرض أن الصراع يقع على وحدة واحدة في وحدة الزمن ولنفرض أن احتمال فوز أ هو جـ ولنجعل $ح_{ن}$ ترمز إلى احتمال خسارة ب كل مصادرة عندما يكون أ عنده ن وحدات.

تتعين $ح_{ن}$ بالمعادلة (٧٠) والشرطين الابتدائين $ح_{.} = ٠$ ، $ح_{ن} = ١$. فمن المعادلتين (٧٦) و(٧٧) يكون حل هذه المعادلة.

$$ح_{ن} = \begin{cases} \dfrac{١ - [(١ - جـ)/جـ]^{ن}}{١ - [(١ - جـ)/جـ]^{ن}} & \text{، اذا كان } جـ \neq \dfrac{١}{٢} \\[2ex] \dfrac{ن}{ك} & \text{اذا كان } جـ = \dfrac{١}{٢} \end{cases}$$

وكما في المثال السابق فإن اي اجراء في صالح أحد المتناسين يضمن فناء النوع الاضعف في النهاية. فمثلاً إذا كان جـ = ٠,٥٥ وكان النوع أ لديه ن وحدات من مجموع ١٠٠ وحدة، يكون لدينا الجدول التالي:

الجدول (٢)

ن	حن
١	٠,١٨١٨
٢	٠,٣٣٠٦
٣	٠,٤٥٢٣
٤	٠,٥٥١٩
٥	٠,٦٣٣٣
١٠	٠,٨٦٥٦
٢٥	٠,٩٩٣٤

لاحظ انه حتى إذا بدأ النوع الذي في صالحه التنافس بما لا يزيد عن ٤ وحدات من فئة وحدة فإن لديه الاحتمال الأقوى لإزالة منافسة في النهاية. اما إذا كان يملك ربع المصادر فإن فوزه في النهاية مؤكد.

وقد اتبع اجراء مماثل لهذا , في إحدى المؤسسات الصناعية، في الحكم على صلاحية مجموعة من المصنوعات وسنصف هذا الاجراء هنا باختصار أما التفصيل فيحده القارئ في بحث كتبه ج أ برنارد باسم اختبارات في الاحصاء الصناعي ونشره في ملحق ن مجلة الجمعية الملكية للاحصاء (١/ ١٩٤٦).

لفحص صلاحية مجموعة من المصنوعات بدئ بوضع نظام للعلامات فاعطيت في البدء العلامة ن ثم صارت المصنوعات تؤخذ واحدة واحدة، عفوياً، فإذا وجدت تالفة، يطرح ك، وإذا وجدت صالحة، يضاف ١. ويقف العمل إذا وصل المجموع إلى ٢ن أو انحط إلى الصفر. فإذا وصل إلى ٢ن تقبل المجموعة، وإذا انحط إلى الصفر ترفض فلنرفض ان احتمال تناول واحدة صاحلة هي جـ، وان خـ= ١ − جـ، وليكن حن هو احتمال رفض المجموعة عندما تكون العلاقةن فبعد

تنادل سلعة أخرى فـال العلاقـة سـتزيد (١) وأحتمـال ذلـك جــ أو تـنقص ك واحتمال ذلك خـ. فيكون:

$$\text{ح}_{\text{ن}} = \text{جـ}\,\text{ح}_{\text{ن}+١} + \text{خـ}\,\text{ح}_{\text{ن}-\text{ك}} \qquad \text{.......................................}(٧٨)$$

وهذه يمكن ان تكتب بصيغة معادلة فرق من الرتبة ك + ١:

$$\text{ح}_{\text{ن}+\text{ك}+١} = \frac{١}{\text{جـ}}\,\text{ح}_{\text{ن}+}\,\text{ك} + \frac{\text{خـ}}{\text{جـ}}\,\text{ح}_{\text{ن}} = ٠ \qquad \text{...............................}(٧٩)$$

ولهذه قيم ن حاصرة هي $\text{ح}_{١-\text{ك}} = ... = \text{ح}_{٠} = ١،\ \text{ح}_{\text{ن}} = ٠$ .....(٨٠)

فإذا كانت ك = ١ تتحول المسألة إلى المثال (١)، ويصبح مؤكداً فيقول المجموعة أو رفضها حسب كون جـ اكبر من $\frac{١}{٢}$ أو أصغر.

التمارين

١. في المثال (١) افرض أن اللاعب (أ) بدأ والأمور في صالحه بمقدار ١٠ في المئة اكثر من ب فإذا بدأ ومعه ٣ دنانير فكم يجب أن يكون مع ب حتى تكون لديه فرصة أكبر لكسب كل ما مع أ؟ حتى تكون فرصته ٨ في المئة؟

٢. أجب عن سؤال التمرين (١) على فرض أن الأمور في صالح أ

(أ) بمقدار ٢٪

(ب) بمقدار ٢٠٪ اكثر من ب.

٣. يمكن تعديل الألعاب المبنية بالتمرينين (١) و(٢) وحتى تتسع لأكثر من احتمالين افرض انه في كل مرة يلعب أ يكون جـ احتمال ربحه ديناراً واحداً، جـ احتمال ربحه دينارين، خـ احتمال خسارته حيث جـ + حـ + خـ =١، وليكن حن كما في المثالين. اكتب معادلة فروق تعطي حن على اعتبار ان كل لاعب يبدأ ومعه ن دينار.

٤. حل معادلة التمرين (٣) على فرض أن جـ = حـ $\frac{١}{٤}$ وان خـ = $\frac{١}{٢}$.

٥. حل معادلة التمرين (٣) على فرض أن جـ = حـ = خـ = $\frac{١}{٣}$

٦. افرض أن جـ احتمال ان يربح أ ديناراً واحداً، حـ أن يخسر ديناراً. خـ أن يخسر دينارين ولتكن حن هي احتمال أن أ سيربح كاما مع ب وذلك عندما يكون معه هو ن ديناراً علما بأن أ، ب بدأ كل منهما ومعه ن ديناراً.

أ) ضع معادلة فروق ومعها القيم الحاصرة المناسبة لهذه المسألة.

ب) حل المعادلة على فرض أن جـ= $\frac{١}{٦}$ ، حـ = $\frac{١}{٣}$ ، خـ= $\frac{١}{٢}$

٧. حلل لعبة فيها يكون هنالك احتمال $\frac{١}{٣}$ لأن يربح أ دينارين، لأن $\frac{٢}{٣}$ يخسر ديناراً واحداً.

أ) افرض ان أ، ب بدأ كل منهما ومعه ن ديناراً. فهل يبدأ أ وهناك أي شيء في صالحه؟ افرض ان ن = ١٠ فما قيمة $ح_{١٠}$؟

ب) اذا بدأ أ بعشرة دنانير وبدأ ب بعشرين فما الاحتمال في البدء في أن يربح أ كل ما مع ب؟

٨. ناقش كل واحد من التمارين السابقة باعتبارها منافسة بين نوعين على مصادر الغذاء.

٩. ضع نموذجاً يناظر ما في المثال (٢) ولكن لثلاثة أنواع تتصارع على مصدر واحد للغذاء.

الفصل الرابع

المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال

Fundamental Concepts of probability theory

الفصل الرابع

المفاهيم الأساسية لنظرية الإحتمال

في هذا الفصل سوف نقوم بتوضيح بعض المفاهيم الأساسية للنظرية الاحتمالية وذلك من خلال الشرح المبسط لهذه المفاهيم وإعطائنا لكثير من الأمثلة التوضيحية والشرح الوافي لها، ومن هذه المفاهيم مفهوم التجربة العشوائية Raudom experiment وكيفية التعبير عن جميع نواتجها كمجموعة من العناصر تسمى بفضاء العينة Sample space حيث تمثل اي مجموعة جزئية من هذا الفضاء بما يسمى بالحادثة العشوائية Random euent. بداية سوف نقوم بإعطاء القارئ فكرة مبسطة عن نظرية المجموعات Set theory والتي تعتمد عليها نظرية الاحتمال في وصف فضاء العينة كذلك سوف نقوم بتوضيح التعريفات المختلفة لمفهوم الاحتمال وعلاقته بالتكرار النسبي لحادثة ما Relative Frequency of eveut وشرح كيفية حساب الاحتمال باستخدام القواعد الاساسية لطرف العد Counting methods وتوضيح مفهومي التباديل والتوافيق. قمنا بعد ذلك باستخدام مسلمات الاحتمال الأساسية في برهنة بعض القوانين الهامة والمستخدمة في حساب الاحتمال لأي حادثة ما ورأينا أنه من الأهمية إعطاء فكرة مبسطة على مفهومي الإحتمال الشرطي واستقلال الحوادث.

تعريف التجربة العشوائية Random experimeds

التجربة العشوائية هي تجربة لها نواتج معلومة مسبقاً لكن لا يمكن التوقع

بأي منها عند تكرارها تحت نفس الشروط. أي أنها تجربة لا تعطي بالضرورة نفس النتجية عند تكرار إجرائها.

فعلى سبيل المثال:

* عملية إلقاء حجر نرد مرة واحدة.

* إلقاء عملة مرة واحدة أو مرتين.

* عملية توليد الأجيال في الخلايا.

* اختيار بطاقة من صندوق به بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠٠.

ونلاحظ أن كل هذه التجارب تشترك فيما بينها في ثلاثة خواص هي:

١) لا يمكن التنبؤ في اي من هذه التجارب بالناتج الذي سيظهر مسبقاً.

٢) يمكن معرفة كل النتائج الممكنة لكل تجربة.

٣) يوجد احتمالية لكل ناتج من النواتج المختلفة يعتمد على نسبة هذا الناتج في الظهور أو تكراره النسبي.

هذه الخواص الثلاث هي الأساس لعمل النموذج الرياضي لكل تجربة من هذه التجارب. وتأتي كلمة (العشوائية) لأنه لا يمكن لنا التنبؤ بأي نتيجة سوف تحدث عند تكرار التجربة.

تعريف: فضاء العينة Sample space:

فضاء العينة التجربة عشوائية هو مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة العشوائية، ويرمز له عادة بالرمز Ω أو ع.

مثال (١):

تجربة القاء حجر نرد فإن فضاء كل النتاج الممكنة هو ع= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}

مثال (٢):

تجربة القاء عملية مرتين: ع = {ص ص ، ص ك، ك ص، ك ك}

حيث ص يعني ظهور الصورة على الوجه العلوي للعملة، وك يعني ظهور الكتابة على الوجه العلوي للعملة.

مثال (٣):

إذا كان ع هو مجموعة الأعداد الزوجية من ط، حيث ط هي مجموعة الأعداد الطبيعية فإن ع معطى بالصورة الآتية ع = {٢، ٤، ٦،.....}.

مثال (٤):

إذا كان ع هو زمن خدمة عميل ما داخل بنك فإن فضاء العينة في هذه الحالة هو ع = {ز ؛ ز ≤ ٠ }

تعريف: الحادث: event

الحادثة هي أي مجموعة جزئية من فضاء العينة ع.

وتنقسم الحوادث إلى:

١) حادث بسيط أو أولي: elemeutary event

وهي حادثة تحتوي على عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

مثل الحوادث {١} أو {٢} عند القاء حجر نرد، هي حوادث بسيطة، أو عند إلقاء عملتين {ص ك} أو {ص ص} هي حوادث بسيطة.

٢) حادث مركب **Compound event**:

وهي حادثة تحتوي على عنصرين أو أكثر من عناصر فضاء العينة.

كمثال عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن الحادثة {١، ٢، ٣} تتكون من ثلاث عناصر وبالتالي فهي حادثة مركبة كذلك عند إلقاء عملة مرتين فإن الحادثة {ص ص، ص ك} هي حادثة مركبة.

* هناك تقسيم آخر للحوات كما يلي:

١) الحوادث المؤكدة Sure events

وهي الحوادث التي تظهر دائماً عند تكرار إجراء التجربة، ويرمز لها بالرمز ع وهي في الغالب تكون فضاء العينة.

٢) الحادث العشوائية Random event:

هو الحادث التي تظهر وقد لا تظهر عند تكرار التجربة، ويرمز لها بالحروف....أ، ب، جـ.

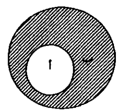
٣) الحادث المستحيل Impossible event or null event:

هو الحادث الذي لا يمكن أن تظهر أبدا مهما تكررت التجربة ويرمز لها بالرمز ϕ

كمثال ظهور العدد ٧ عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة هي حادثة مستحيلة.

* ملحوظة: طالما أن الحادثة عبارة عن مجموعة من العناصر المعروفة تعريفاً جيداً فيمكن التعامل معها بقوانين المجموعات التي يمكن تلخيصها كالآتي:

١. الحادث الجزئي **subset event**



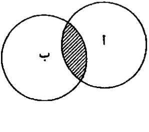
شكل يوضح أن الحادث أ مجموعة جزئية من ب.

يقال أن أحادث جزئي من ب وتكتب أ ⊂ ب، ولها مدلول أن ظهور الحادثة أ يعني ظهور الحادثة ب لأن كل عناصر من الحادثة أ هو عنصر ب لذلك نقول أن ظهور أ يؤدي إلى ظهور الحادثة ب لكن العكس ليس صحيح دائماً.

٢. تكافؤ أو تساوي حادثتين **equal events**:

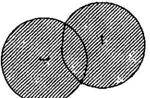
يقال أن الحادثة أ تكافئ أو تساوي الحادثة ب، وتكتب أ = ب إذا كان وفقط إذا كان أ ⊂ ب ، ب ⊂ أ ، أي أن الحادثتين يحتويان على نفس العناصر.

٣. تقاطع حادثين **Intersection of two events**:



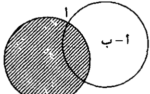
تقاطع الحادثين أ، ب هو أ ∩ ب ويعني ظهور كلا من أ، ب معاً. واضح أن حدوث أ ∩ ب يعني حدوث أ لأن أ ∩ ب ⊆ أ، وبالمثل فإن أ ∩ ب كذلك يعني حدوث ب.

٤. اتحاد حادثين Vnion of two events:



اتحاد حادثين أ، ب هو حادثة تعني ظهور أ أو ب أو كليهما ويرمز لها بالرمز أ ∪ ب واضح أن أ ∩ ب ⊇ أ ∪ ب وبالتالي فإن حدوث أ ∩ ب يعني حدوث أ∪ ب.

٥. الفرق بين حادثتين The defrance between two events:



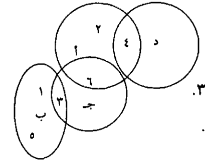
أ – ب الحادثة تعني ظهور أ مع عدم ظهور ب. أو تتكون من جميع عناصر أ عدا التي تنتمي إلى ب وبالمثل يمكن تعريف ب – أ على أنه جميع العناصر التي تنتمي إلى ب ولا تنتمي إلى أ.

٦. الحادثة المكملة Compuemant event:

الحادثة المكملة لأي حادثة أ هي حادثة تتكون من جميع عناصر المجموعة الشاملة (أي فضاء العينة ع) والتي لا تنتمي إلى أ ويرمز لها بالرمز $\overline{أ}$ وبطريقة أخرى فإن $\overline{أ}$ يعني عدم ظهور الحادثة أ والعكس صحيح.

مثال (٥):

إذا كان ع= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} هو فضاء العينة عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة وكانت:



أ: حادث ظهور عدد زوجي.

ب: حادث ظهور عدد فردي.

جـ: ظهور عدد يقبل القسمة على ٣.

د: ظهور عدد يقبل القسمة على ٤.

أوجد الحوادث الآتية:

١. أ، ب، جـ، د.　　　　٣. أ $\cup$ ب، أ $\cap$ ب، أ − ب، ب − أ

٢. $\overline{\text{أ}}$ ، $\overline{\text{ب}}$ ، $\overline{\text{جـ}}$ ، $\overline{\text{د}}$　　　　٤. ب $\cap$ جـ، ب $\cap$ د، ب $\cup$ د، جـ $\cup$ ب

الحل:

١) الحدوات المطلوبة هي:

أ = {٢، ٤، ٦} ، ب = {١، ٣، ٥} ، جـ = {٣، ٦} ، د = {٤}

٢) وبإيجاد مكملات هذه المجموعات كالآتي:

$\overline{\text{أ}}$ = {١، ٣، ٥} ، $\overline{\text{ب}}$ = {٢، ٤، ٦} ، $\overline{\text{جـ}}$ = {١، ٢، ٤، ٥}

$\overline{\text{د}}$ = {١، ٢، ٣، ٥، ٦}

٣) أ $\cup$ ب = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} = ع

أ $\cap$ ب = ϕ، أ − ب = {٢، ٤، ٦} ، ب − أ = {١، ٣، ٥}

٤) ب $\cap$ جـ = {٣}، ب $\cap$ د = ϕ، د $\cup$ ب = {١، ٣، ٤، ٥}، جـ $\cup$ ب = {٣، ٦}

٥) واضح أن ٦ ∉ ب، ٦ ∈ جـ وبالتالي فإن جـ ⊄ ب

* ملحوظة: في المثال السابق وجدنا أن المجموعتين أ، ب اتحادهم يساوي ع وتقاطع هو ϕ مثل هذه المجموعات يسمى تجزيء لفضاء العينة ع Pawtation of the sample spaa أنه لأي مجموعتان أ، ب تكونا تجزيء لفضاء العينة ع إذا تحقق الآتي:

أ) أ ∩ ب = ϕ

ب) أ∪ب = ع

بعض خصائص العمليات على المجموعات Some prorerties of set operations لأي ثلاث مجموعات أ و ب و جـ فإن:

١) أ ∩ ب = ب ∩ أ ، أ∪ب = ب ∪ أ خاصية الابدال.

٢) أ∩(ب ∩ جـ)=(أ ∩ ب)∩جـ أ ∪(ب∪جـ)=(أ ∪ب)∪جـ خاصية الدمج

٣) أ ∩ (ب ∪ جـ) = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ جـ)

أ ∪ (ب ∩ جـ) = (أ ∪ ب) ∩ (أ ∪ جـ)

وتسمى بخاصيتي التوزيع، سواء توزيع عملية التقاطع على عملية الاتحاد أو العكس.

٤) أ – ب = أ ∩ $\overline{ب}$

٥) أ ∇ ب = (أ – ب) ∪ (ب – أ)

$= (\text{أ} \cup \text{ب}) - (\text{أ} \cap \text{ب})$ الفرق المتماثل.

٦) $\overline{(\text{أ} \cup \text{ب})} = \overline{\text{أ}} \cap \overline{\text{ب}}$ ، $\overline{(\text{أ} \cap \text{ب})} = \overline{\text{أ}} \cup \overline{\text{ب}}$ قانوني ديمورجان

٧) $\text{أ} = (\text{أ} \cup \text{ب}) \cap \text{أ} = (\text{أ} \cap \text{ب}) \cup \text{أ}$، قانوني الامتصاص.

٨) $\text{أ} \cap \emptyset = \emptyset$، $\text{أ} \cup \emptyset = \text{أ}$، $\text{أ} \cap \text{أ} = \text{أ}$، $\text{أ} \cup \text{أ} = \text{أ}$

٩) $\text{ع} \cap \text{أ} = \text{أ}$، $\text{ع} \cup \text{أ} = \text{ع}$

وفكره برهان كل هذه الخصائص تعتمد على أن: $\text{أ} = \text{ب} \Leftrightarrow \text{أ} \subseteq \text{ب}، \text{ب} \subseteq \text{أ}$

* ملحوظة: إذا كان لدينا ن من المجموعات أ_1، أ_2، أ_3،......، $\text{أ}_\text{ن}$ فإن:

$$\bigcup_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{أ}_\text{ي} = \text{أ}_1 \cup \text{أ}_2 \cup \text{أ}_3 \cup \ldots\ldots \cup \text{أ}_\text{ن}، \quad \bigcap_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{أ}_\text{ي} = \text{أ}_1 \cap \text{أ}_2 \cap \text{أ}_3 \cap \ldots\ldots \cap \text{أ}_\text{ن}،$$

تعريف: قوة المجموعة The power of set

قوة المجموعة أ هو عدد عناصرها ويرمز له بالرمز ن (أ) أو $|\text{أ}|$.

تعريف: حاصل الضرب الديكارتي Cavtesion Product

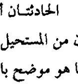
إذا كان لدينا مجموعة أ مكونة من م من العناصر هي م_1، م_2، م_3،......، $\text{م}_\text{م}$ وكانت هناك مجموعة آخر ب مكونة من ن من العناصر هي ب_1، ب_2، ب_3،.........، $\text{ب}_\text{ن}$ فإن حاصل الضرب الديكارتي $\text{أ} \times \text{ب}$ هو جميع الأزواج المرتبة Ordered Pairs التي على الصورة $(\text{م}_\text{ي}، \text{م}_\text{ر})$ يكون عددها هو $\text{م}_\text{ن}$ أي أن:

$$\text{أ} \times \text{ب} = \{(\text{م}_\text{ي}، \text{ب}_\text{ر}): \text{ي} = 1، 2، 3، \ldots\ldots\text{م} \text{ و } \text{ر} = 1، 2، 3، \ldots\ldots\text{ن}\}$$

مثال (٦):

بفرض أن لدينا أ = {١، ٢، ٣، ٤} والفئة الأخرى هي ب = {٥، ٦} فإن جميع الأزواج الممكنة هي أ × ب = {(١، ٥)، (٢، ٥)، (٣، ٥)، (٤، ٥)، (١، ٦)، (٢، ٦)، (٣، ٦)، (٤، ٦)} وعددها هو ٢ × ٤ أي ٨ عناصر.

تعريف: الحوادث المتنافية Mutually exclusive:



الحادثتان أ، ب تكونا متنافيتين (متباعدتين) إذا كان من المستحيل حدوثهما معاً ويكون أ ∩ ب = ϕ كما هو موضح بالشكل الذي أمامك.

مثال (٧):

إذا كانت أ هي حادثة ظهور عدد زوجي عند إلقاء حجر نرد وكانت ب هي حادثة ظهور عدد فردي فإن أ ∩ ب = ϕ أي أن الحادثتين أ و ب متنافيتان وهذا بالطبع واضح لأنه لا يمكن ظهور عدد زوجي وفردي على حجر نرد في نفس الوقت.

*** أنواع فضاء العينة**

يوجد ثلاثة أنواع من فضاء العينة.

١) فضاء منتهي Finite Space:

هو فضاء يحتوي على عدد محدود من نقاط فضاء العينة ويوجد العديد من الأمثلة على مثل هذا النوع من الفضاءات على سبيل المثال الفضاء الناتج من

عملية إلقاء عملة مرة أو إلقاء عملة مرتين أو إلقاء حجر نرد مرة أو إلقـاء حجر نرد مرتين.

٢) فضاء غير منتهي وقابل للعد Countably Infinite space:

هو فضاء يمكن مناظرته بمجموعة الأعداد الطبيعية ن حيث ن = {١، ٢، ٣، ..}

٣) فضاء غير منته وغير قابل للعد Uncountably infinite:

هو فضاء يحتوي على عدد لا نهائي من النقاط ولا يمكن إيجاد تنـاظر بينـه وبين مجموعة الأعداد الطبيعية ن وسوف نقـول بـأن ع أو Ω هـو فـضاء متقطـع Discrete Sawple space إذا كانت ع أو Ω قابلة للعد وبخلاف ذلك فـإن ع أو Ω فضاء متصل Continuouse Sawple space.

مثال (٨):

بفرض أن فضاء العينة ع يتكون مـن درجـات الحـرارة خـلال يـوم مـا في واحد من مدن المملكـة ع = {س: س ∈ ح}، حيـث ح هـي مجموعـة الأعـداد الحقيقية واضح أن ع فضاء متصل.

مثال (٩):

قذفت قطعة نقود ثلاث مرات. أوجـد الحـوادث التاليـة. واحـسب عـدد عناصرها.

أ = {الحصول على صورة في الرمية الثانية}

ب= {الحصول على كتابة في الرمية الثانية}

جـ = {الحصول على ثلاث صور في الرميات الثلاث}

د = {الحصول على صورة واحدة على الأكثر}

الحل:

فضاء العينة في هذه الحالة هو ع = { ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك، ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك}

حيث ص تعني ظهور الصورة، ك تعني ظهور الكتابة واضح أن ع هو مثال لفضاء منقطع وبالتالي فإن:

أ= {ص ص ص، ص ص ك، ك ص ص، ك ص ك}

وعدد عناصرها هو ن (أ) = ٤.

ب={ك ك ك، ك ك ص، ص ك ك ، ص ك ص}،

وعدد عناصرها هو ن (ب)= ٤.

جـ= {ص ص ص}، وعدد عناصرها هو ن (جـ) =١

د= {ص ك ك، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك} وعدد عناصرها هو ن(د) = ٤

مثال: (١٠):

إذا كان ع هو فضاء العنية الناتج عن إلقاء حجري نرد متميزتين، كل حجر منهم مكون من أربعة أوجه فقط (أي شكل هرمي) مرقمه من ١ إلى ٤ أوجد ع.

أ = ظهور عددين متساويين على حجري نرد.

ب= العدد الأول ١ والعدد الثاني زوجي.

ج= مجموع العددين الظاهرين على حجري نرد ٧.

د= الفرق المطلق بين العددين الظاهرين هو ٢.

الحل:

فضاء العينة ع يمكن تمثيل بالشبكة الآتية:

(١،٤).	(٤،٢).	(٤،٣).	(٤،٤).
(٣،١).	(٣،٢).	(٣،٣).	(٣،٤).
(٢،١).	(٢،٢).	(٢،٣).	(٢،٤).
(١،١).	(١،٢).	(١،٣).	(١،٤).

وبالتالي فإن:

أ= {(١،١)،(٢،٢)،(٣،٣)،(٤،٤)}

ب={(٢،١)،(٤،١)}

ج={(٤،٣)،(٣،٤)}

د={(٣،١)،(١،٣)،(٤،٢)،(٢،٤)}

واضح أن ج∩ د=Ø أي ان ج،د حادثتن متنافيتان، بالمثل فإن ب،د حادتين متنافيتان كذلك أ∩ ب= Ø، أ∩ج= Ø، د∩أ= Ø فإن الحوادث أ،ب، ج،د كلها حوادث متنافية مثنى مثنى.

تعريف الحوادث المتنافية مثنى مثنى: Muttally exclusice in psirs

يقال للحوادث أ$_{1}$، أ$_{2}$، أ$_{3}$، ....، أ$_{ن}$ أنها متنافية مثنى مثنى إذا كان وفقط إذا كان أي $\cap$أ$_{ر}$ = $\emptyset$، $\forall$ ي$\neq$ ر

*المفهوم الكلاسيكي للإحتمال: Classical Cancept of probability

عند القاء حجر نرد مره واحدة فإن مجموعة النواتج الممكنة هي الأعداد ١،٢،٣،٤،٦،٥ وهي أعداد لايمكن لها الظهور في نفس الوقت وبفرض أن الحجر مثالي ومصنوع بطريقة تجعل هذه الارقام لها نفس فرص الظهور، فإن $\frac{1}{6}$ هو مقياس لظهور أي عدد من هذه الأعداد وبالتالي إذا كان لدينا ن من النواتج لها نفس فرص الظهور وكانت الحادثة أ مجموعة جزئية من هذه النواتج وعدد عناصرها هو م فإن النسبة م/ ن هي مقياس لاحتمال ظهور الحادثة أ.

تعريف لابلاس للإحتمال: Laplace's classical definition of mathematical prabability

الأحتمال ح (أ) لأي حادثة عشوائية أ هو ح(أ)= م/ن حيث م هو عدد مرات حدوث الحادثة أ ون هو عدد جميع نواتج التجربة (فضاء العينة). وبالتالي فإنه إذا كانت أ هي حادثة الحصول على العدد ٢ فإن احتمال حدوثها هو $\frac{1}{6}$ واحتمال الحصول على عدد فردي $\frac{3}{6}$ أي $\frac{1}{2}$.

مثال (١١):

إذا كانت ع هو فضاء العينة الناتج من إلقاء عملة مرتين وكانت أ هي

حادثة ظهور صورتين ب ظهور صورة واحدة. أوجد ح (أ) و ح (ب).

الحل:

كما سبق فإن فضاء العينة في هذه الحالة هو ع= {ص ك، ص ص، ك ص، ك ك} وبالتالي فإن أ = {ص ص} وب= {ص ك، ك ص} أي أن ح(أ) = $\frac{١}{٤}$ وكذلك ح(ب) = $\frac{٢}{٤}$ = ٠,٥ .

مثال(١٢): إذا كان ع هو فضاء العينة الناتج من إلقاء حجري نرد متميزين مرة واحد وكان كل حجم عبارة عن مكعب كتب على أوجه الستة أرقام من ١ إلى ٦، فإذا كانت أ حادثة الحصول على مجموع الرقمين الظاهرين ٧ أوجد ح(أ).

الحل:

سبق وأن تم إيجاد فضاء العينة الناتج عند إلقاء حجري نرد متميزتين ويتكون من أربعة أو جهة وبالمثل فإن عدد الفضاء في هذا المثال يتكون من ٣٦ زوج مرتب وبالتالي فإن عناصر الحادثة أ هي {(١، ٦)، (٢، ٥)، (٣، ٤)، (٤، ٣)، (٥، ٢)، (٦، ١)} وبالتالي فإن ح(أ) = $\frac{٦}{٣٦}$ = ٠,١٦٦.

ونلاحظ أن تعريف لابلاس يعتمد على فكرة أن جميع النواتج لها نفس فرص الظهور وهذا يعني أنه يمكن تطبيقه فقط على التجارب التي لها عدد محدود من العناصر المتساوية في عدد مرات الظهور وبالتالي لا يمكن تطبق هذا التعريف على عدد كبير من المسائل. كمثال إذا أردنا إيجاد احتمال شخص مصاب بمرض

ما أو احتمال سحب لمبة معيبة من إنتاج مصنع ما. وبالتالي فنحن بحاجة إلى تعريف أكثر شمولاً من تعريف لابلاس.

نظرية التكرار الاحتمال :The Frequency theory of probability

توجد طريقة أخرى لتعريف الاحتمال وذلك باستخدام مفهوم التكرار النسبي والذي سبق وأن تم شرحه سابقاً. فإذا كان لدينا تجربة ما عشوائية تتكون من المخرجات س١، س٢، س٣، .....، سن وبتكرارت هي ن١، ن٢، ن٣،...،نن على الترتيب، وكان مجموع تكرارات هو ن أي أن ن١+ ن٢ +ن٣ + ...+نن فإن نسبة سي هي القيمة ني/ ن ويكون مجموع هذه النسب مسار للواحد الصحيح. ونظرية التكرار للاحتمال تفترض أنه عندما تقترب ن من المالانهاية فإن التكرار النسبي لحدوث حادثة ما يساوي قيمة الاحتمال أي أن:

$$ح\ (س_ي) = \underset{ن \leftarrow \infty}{نهـا} \frac{ن_ي}{ن} \text{ ، } ي = ١، ٢، ٣،.....،ن$$

كمثال إذا قمنا بإجراء تجربة ما مثل إلقاء عمله معدنية لها وجهان وهذان الوجهان لهما نفس فرص الظهور. وبإيجاد التكرار النسبي لظهور الكتابة على العملة فسوف نلاحظ أن قيمة التكرار النسبي لظهور الكتابة يؤول إلى مقدار ثابت يقرب من $\frac{١}{٢}$ كلما زاد عدد الرميات إلى مالانهاية.

مسلمات الاحتمال Ayioms of Mathematical Probability

بفرض أن أ حادثة ما من فضاء العينة ع فإنه يوجد عدد ما ح(أ) يحقق الآتي:

١) لأي حادثة أ من فضاء العينة ع فإن ٠ $\geq$ ح(أ).

٢) إذا كانت ع فضاء العينة فإن ح(ع) = ١.

٣) إذا كانت أ، ب حادثتين متنافيتان من فضاء العينة ع فإن ح(أ$\cup$ب) = ح(أ) + ح(ب) ويمكن تعميم المسلمة الثالثة في حالة ما إذا كان عدد ن من الحوادث المتنافية مثنى مثنى كالآتي:

ح($أ_١ \cup أ_٢ \cup أ_٣ \ldots\ldots \cup أ_ن$) = ح($أ_١$) + ح($أ_٢$) + ح($أ_٣$) +...+ ح($أ_ن$).

حيث $أ_١$، $أ_٢$، $أ_٣$،......،$أ_ن$ هي حوادث جزئية من فضاء العينة ع ومتنافية مثنى مثنى.

* ملحوظة: يمكن برهنة المعادلة الأخيرة اعتماداً على مسلمة ٣ وخطوات الاستنتاج الرياضي.

مثال (١٣):

القي حجر نرد مكون من أربع أوجه مرقمة ١، ٢، ٣، ٤ وكانت أ حادثة ظهور عدد فردي ب حادثة ظهور عدد يقبل القسمة على ٣. فأوجد ح (ب).

الحل:

فضاء العينة في هذه الحالة هو ع = {١، ٢، ٣، ٤} وبالتالي فإن:

أ = {١، ٣}   ، ب = {٣}.

$ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ع)} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$.

$$ح(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ع)} = \frac{١}{٤}$$

واضح أن فرصة ظهور أ أكبر من فرصة ظهور ب وذلك لأن ب ⊂ أ.

مثال (١٤):

أحد الفرق الدراسية تتكون من ١٠٠ طالب كانت نتائجهم في الاختبار كما يلي: ٧٨ رسبوا في الاقتصاد، ٣٤ رسبوا في الإحصاء، ١٢ رسبوا في كلا المادتين تم إختيار طالب عشوائياً من هذه الفرق أوجد الاحتمال:

١) أن يكون الطالب رسب في الاقتصاد.

٢) أن يكون الطالب رسب في الإحصاء.

٣) أن يكون الطالب رسب في المادتين معاً.

الحل:

بفرض أن أ = {رسوب في الاقتصاد}

ب = {رسوب في الإحصاء}

أ ∩ ب = {رسوب في المادتين}

$$ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ع)} = \frac{٧٨}{١٠٠} = ٠,٧٨$$

$$ح(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ع)} = \frac{٣٤}{١٠٠} = ٠,٣٤$$

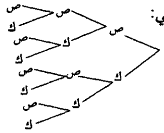
$$ح(أ \cap ب) = \frac{ن(أ \cap ب)}{ن(ع)} = ٠,١٢$$

مثال (١٥):

ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات فإذا كانت أ هي حادثة ظهور صورتين على الأقل فأوجد ح (أ).

الحل:

نوجد أولاً فضاء كالآتي:



وبالتالي فإن عدد عناصره هو $٢^٣$ أي ٨ ويمكن سردهم بالصورة الآتية:-

ع = {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك، ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك}

الحادثة أ هي: أ = {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص}

مثال (١٦):

إذا اعتبرنا أن ع هو فضاء العينة الناتج عن إلقاء حجر النرد فإن: ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} ليكن:

أ = {ظهور عدد فردي} ، ب = {ظهور عدد زوجي}

جـ = {ظهور عدد يقبل القسمة على ٣}

١) هل أ، ب حادثتان متنافيتان.

٢) هل ب، جـ متنافيتان.

الحل:

واضح إن: أ = {١، ٣، ٥} ، ب = {٢، ٤، ٦}، جـ = {٣، ٦}

أ ∩ ب = ϕ ، ب ∩ جـ = {٦} ، أ ∩ جـ = {٣}

واضح أن الحادثتين أ، ب متنافيتان بينما أ، جـ غير متنافيتان، ب، جـ غير متنافيتان والآن نعطي النتائج الهامة والتي يمكن برهنتها بإستخدام مسلمات الإحتمال الثلاث.

نظرية(١): برهن أن لأي حادثتين أ، ب فإن: ح(أ∩$\overline{\text{ب}}$) = ح(أ) = ح(أ∩ب)

أو بطريقة أخرى فإن:

ح(أ) = ح (أ∩ب) + ح (أ∩$\overline{\text{ب}}$).

البرهان: إنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

نظرية(٢): إذا كانت أ و ب أي حادثتنان من فضاء العينة ع فإن:

ح (أ∪ب) = ح(أ) + ح(ب) – ح (أ∩ب)

البرهان: إنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

* ملحوظة: يمكن كتابة الصورة السابقة أيضاً كالآتي:

ح (أ∩ب) = ح(أ) + ح(ب) – ح (أ∪ب)

نتيجة:

١) إحتمال الحادثة المستحيلة هو الصفر ح(ϕ) = ٠

٢) لأي حادثة أ فإن ح($\overline{أ}$) + ح(أ) = ١

٣) إذا كانت أ $\supset$ ب فإن ح(أ) $\geq$ ح(ب)

٤) لأي ثلاث حوادث أ، ب، جـ فإن:

ح (أ$\cup$ب$\cup$جـ) = ح(أ) + ح(ب) + ح(جـ) – ح(أ$\cap$ب) – ح(ب$\cap$جـ)– ح(أ$\cap$جـ) + ح(أ$\cap$جـ$\cap$ب).

البرهان: أنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

مثال (١٧):

في عمليةي حصر لـ٢٠٠ طالب من طلاب جامعة الملك سعود وجد أن ٦٥ يقرؤون جريدة أ (الشرق الأوسط) و ٨٠ يقرؤون جريدة ب (الحياة)، ١٢٥ يقرؤون جريدة جـ (عكاظ)، ٢٠ يقرؤون جريدتي الشرق الأوسط والحياة، ٢٥ يقرؤون جريدتي الشرق الأوسط وعكاظ ٣٥ يقرؤون الحياة وعكاظ وبفرض أن جميع الطلاب يقرؤون أي من الجرائد الثلاث. اختير طالب عشوائياً فأوجد الاحتمالات الآتية:

١) أن يكون الطالب من قراء الجرائد الثلاث معاً.

٢) أن يكون الطالب من قراء جريدة الشرق الأوسط فقط.

الحل:

ليكن أ = {أن يكون الشخص المختار من قراء جريدة الشرق الأوسط}.

ب = {أن يكون الشخص المختار من قراء جريدة الحياة}

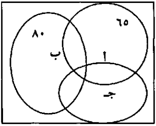
جـ = {أن يكون الشخص المختار من قراء جريدة عكاظ}

وبالتالي فإن:

ح(أ∪ب∪جـ) = ح(أ) + ح(ب) + ح(جـ) − ح(أ∩ب) − ح(ب∩جـ) − ح(أ∩جـ) + ح(أ∩جـ∩ب).

ويكون المطلوب أولاً هو إيجاد احتمال أن يكون الشخص المختار من قراء الجرائد الثلاث معاً، أي احتمال أ∩ب∩جـ

ح(أ∩ب∩جـ) = ح(أ∪ جـ∪ب) − ح(أ) − ح(ب) − ح(جـ) + ح(أ∩ب) − ح(ب∩جـ) + ح(أ∩جـ).



$= ١ - \frac{٦٥}{٢٠٠} - \frac{٨٠}{٢٠٠} - \frac{١٢٥}{٢٠٠} + \frac{٢٥}{٢٠٠} + \frac{٣٥}{٢٠٠} = \frac{١}{٢٠}$

ثانياً لأيجاد احتمال أن يكون الطالب من قراء جريدة الشرق الأوسط فقط يلزم إيجاد احتمال أ∩$\overline{(\text{ب}\cup\text{جـ})}$ وبالتالي فإن:

ح(أ∩$\overline{(\text{ب}\cup\text{جـ})}$)= ح(أ) − ح(أ ∩(ب ∪ جـ))،

= ح(أ) − (ح(أ∩ب) + ح(أ∩جـ) − ح(أ∩ب∩جـ)،

$$= \frac{٦٥}{٢٠٠} - \frac{٢٠}{٢٠٠} - \frac{٢٥}{٢٠٠} + \frac{١٠}{٢٠٠} = \frac{٣٠}{٢٠٠}$$

*** أمثلة محلولة:**

في هذا الجزء سوف نتناول بالشرح بعض الأمثلة التوضيحية التي تغطي كل ما تم دراسته في هذا الفصل.

مثال (١٨):

تم اختبار جهاز كهربائي وذلك بتسجيل وقت خدمته ز بالساعة وبفرض أن فضاء العينة في هذه الحالة هو جميع قيم ز الحقيقية الغير سالبة فإن:

ع = {ز ∋ ح: ز ≤ ٠}

أوجد:

١. الحادثة أ أن يعمل الجهاز لمدة تقل عن مائة ساعة.

٢. الحادثة ب أن يعمل الجهاز لمدة تقل عن مائة وخمسون ساعة.

٣. الحادثة جـ أن يعمل الجهاز لمدة تتراوح بين ٥٠ ساعة إلى ١٥٠ ساعة.

ثم أوجد الحوادث الآتية:

أ∪ب، ب∪جـ أ∩جـ، ب∩جـ $\overline{أ}$، $\overline{ب}$

الحل:

واضح أن الفضاء المعطي في هذه الحالة هو فضاء متصل والحوادث المطلوبة هي:

أ = {ز ∋ ع : ز < ١٠٠}،   ب= {ز ∋ ع: ز < ١٥٠}،

جـ = {ز ∋ ع : ٠ < ز <١٥٠}،   أ∪ب = {ز ∋ ع: ز < ١٥٠}،

ب∪جـ = {ز ∋ ع : ز <١٥٠}،   أ∩جـ = {ز ∋ ع: ٥٠ < ز<١٠٠}،

ب ∩جـ = {ز ∋ ع : ٥٠ < ز <١٥٠}، أ̅ = {ز ∋ ع : ز > ١٠٠}

جـ̅ = {ز ∋ ع: ز < ٥٠ ، ز > ١٥٠}.

مثال (١٩):

صندوق يحتوي على ٥٠ تفاحة، و١٥٠ برتقالة فإذا كان نصف التفاح ونصف البرتقال عطب (معيب) فإذا تم أخذ واحدة من هذا الصندوق عشوائياً.

١. احتمال أن تكون الوحدة المسحوبة معيبة.

٢. احتمال أن تكون الوحدة المحسوبة معيبة أو تفاحة.

الحل:

بفرض أن أ= {الحصول على وحدة معيبة}.

ب = {الحصول على وحدة تفاحة}

أ ∩ ب = {الحصول على تفاحة معيبة}

أ ∪ ب = {الحصول على تفاحة أو وحدة معيبة}

واضح أن:

ح(أ) = $\frac{١٠٠}{٢٠٠}$ ، ح(ب) = $\frac{٥٠}{٢٠٠}$، ح (أ ∩ ب) = $\frac{٢٥}{٢٠٠}$

وبالتالي فإن

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب) = \frac{١٠٠}{٢٠٠} + \frac{٥٠}{٢٠٠} - \frac{٢٥}{٢٠٠} = ٠,٦٢٥$$

مثال (٢٠):

بفرض أن أ وب وجـ ثلاث حوادث تكون تجزئ لفضاء ما ع بحيث

ح(أ) = ح(ب)، ح(أ) = ٢ح(جـ) أوجد ح(أ)، ح(ب)، ح(جـ).

الحل:

بما أن أ، ب، جـ تكون تجزئ لفضاء العينة ع فهي حوادث متنافية مثنى مثنى وإتحادها يساوي فضاء العينة وبالتالي:

$$١ = ح(ع) = ح(أ \cup ب \cup جـ) = ح(أ) + ح(ب) + ح(جـ)$$

وبالتعويض عن ح(أ)، ح(ب) بدلالة ح(جـ) وإيجاد قيمة ح(جـ) فإن:

$$١ = ٢\ ح(جـ) + ٢ح(جـ) + ح(جـ) \Longrightarrow ح(جـ) = \frac{١}{٥}،$$

$$ح(أ) = ٢ح(جـ) = \frac{٢}{٥} = ح(ب)$$

مثال (٢١):

بفرض أن أ، ب، جـ ثلاث حوادث من فضاء ما ع بحيث

ح(أ) = ح(ب) = ح(جـ) = ٠,٢٥

وكـان ح(أ ∩ ب) = ح(جـ ∩ ب) =٠، ح(أ ∩جـ)= ٠,١٢٥ أوجـد الآتي:

١) ح(أ∪جـ) ٢) ح(أ∪ب) ٣) ح($\overline{\text{أ}}$)

٤) ح($\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$) ٥) ح($\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$) ٦) ح(أ∩ $\overline{\text{ب}}$)

٧) ح(أ∩ $\overline{\text{جـ}}$) ٨) ح($\overline{\text{ب}}$ ∩ $\overline{\text{جـ}}$)

الحل:

١. نعلم أن ح(أ∪جـ) = ح(أ) + ح(جـ) − ح(أ∩جـ).

= ٠,٢٥ + ٠,٢٥ − ٠,١٢٥ = ٠,٣٧٥

٢. والآن توجد ح(أ∪ب)

= ح(أ) + ح(ب) − ح(أ∩جـ)

= ٠,٢٥ + ٠,٢٥ = ٠,٥

٣. إيجاد ح($\overline{\text{أ}}$) = ١−ح(أ) = ١− $\frac{١}{٤}$ = ٠,٤٧٥

٤. باستخدام قانون ديمورجان لدينا ح($\overline{\text{أ}}$ ∪ $\overline{\text{ب}}$)= ح(($\overline{\text{أ∩ب}}$))

= ١−ح(أ∩ب)=١

٥. أيضاً باستخدام قانون ديمورجان لدينا ح($\overline{\text{أ}}$ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح(($\overline{\text{أ∪ب}}$))

= ١−ح(أ∪ب)=١−٠,٥=٠,٥

٦. لإيجاد ح(أ∩ $\overline{\text{ب}}$) فإن ح(أ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح(أ) − ح (أ∩ ب)

$= ٠,٢٥ - ٠ = ٠,٢٥$

٧. وبالمثل فإن ح$(أ \cap \overline{جـ})$ = ح(أ) − ح(أ$\cap$جـ)

$= ٠,٢٥ - ٠,١٢٥ = ٠,١٢٥$

٨. وأخيراً باستخدام قانون المكملة فإن: ح$(\overline{ب} \cap \overline{جـ})$ = ح$((\overline{ب \cup جـ}))$

= ١−ح(ب$\cup$جـ)= ١−(٠,٢٥+٠,٢٥)= ٠,٥

مثال(٢٢):

عدد صحيح تم اختياره من بين أول ٢٠٠ عدد صحيح موجب فما هو إحتمال أن يكون العدد المختار عشوائياً يقبل القسمة على ٦ أو ٨.

الحل:

بفرض أن أ= {حادثة أن العدد المختار يقبل القسمة على ٦}

ب = {حادثة أن العدد المختار يقبل القسمة على ٨}

نعلم أن فضاء العينة هو: ع = {١، ٢، ٣، ٤،......،٢٠٠}

وبالتالي: أ= {٦، ١٢، ١٨، ٢٤، ٣٠،.....١٩٨}

ب= {٨، ١٦، ٢٤،.....،٢٠٠}

$$ح(أ) = \frac{ن(أ)}{ن(ع)} = \frac{٣٣}{٢٠٠} = ٠,١٦٥$$

$$ح(ب) = \frac{ن(ب)}{ن(ع)} = \frac{٢٥}{٢٠٠} = ٠,١٢٥$$

$أ \cap ب = \{٢٤، ٤٨، ٧٢،.....، ١٩٢\}$

$ح(أ \cap ب) = \frac{ن(أ \cap ب)}{ن(ع)} = \frac{٨}{٢٠٠}$

ويكون المطلوب هو إيجاد قيمة $أ \cup ب$ أي $ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب)$

$= \frac{٣٣}{٢٠٠} + \frac{٢٥}{٢٠٠} - \frac{٨}{٢٠٠} = \frac{٥٠}{٢٠٠}$

مثال (٢٣):

صندوق يحتوي على ٣٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٣٠ أخذت بطاقة عشوائياً فما احتمال أن يكون عليها رقم فردي أو مربع لأي عدد صحيح.

الحل:

نعلم أن فضاء العينة هو ع = $\{١، ٢، ٣، ٤،.....، ٣٠\}$

وبفرض أن أ هي حادثة ان يكون الرقم الذي على البطاقة هو رقم فردي وأن ب هي حادثة أن الرقم هو عدد مربع لأي عدد صحيح من ١ إلى ٣٠ وبالتالي فإن:

أ= $\{١، ٣، ٥، ٧،.....، ٢٩\}$

ب = $\{١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥\}$

$أ \cap ب = \{١، ٩، ٢٥\}$

وبالتالي

$$\text{ح}(\text{أ}) = \frac{\text{ن}(\text{أ})}{\text{ن}(\text{ع})} = \frac{١٥}{٣٠} \text{ ، ح}(\text{ب}) = \frac{\text{ن}(\text{ب})}{\text{ن}(\text{ع})} = \frac{٥}{٣٠} \text{ ، ح}(\text{أ}\cap\text{ب}) = \frac{٣}{٣٠}$$

$$\text{ح}(\text{أ}\cup\text{ب}) = \text{ح}(\text{أ}) + \text{ح}(\text{ب}) - \text{ح}(\text{أ}\cap\text{ب})$$

$$= \frac{١٥}{٣٠} + \frac{٥}{٣٠} - \frac{٣}{٣٠} = \frac{١٧}{٣٠}$$

مثال(٢٤):

قذفت ثلاث قطع معدنية من النقود مرة واحدة (أو قطعة تقذف ثلاث مرات) وعرفنا الحوادث الآتية:

أ: حادثة ظهور صورة في الرمية الثانية، ب: حادثة ظهور صورة على الأقل.

جـ: حادثة ظهور صورتين على الأقل، د: حادثة ظهور كتابة من الرمية الأولى.

أوجد الإحتمالات الآتية:

١) ح(أ$\cup$د) ٢) ح(أ$\cup$ب) ٣) ح($\overline{\text{د}}$).

٤) ح($\overline{\text{أ}}\cup\overline{\text{ب}}$) ٥) ح($\overline{\text{أ}}\cap\overline{\text{ب}}$) ٦) ح(أ$\cap\overline{\text{ب}}$)

٧) ح(أ$\cap\overline{\text{جـ}}$) ٨) ح($\overline{\text{ب}}\cap\overline{\text{جـ}}$)

الحل:

١) نريد إيجاد قيمة ح(أ$\cup$د) وبإيجاد الحوادث أ، ب، جـ د فإن:

أ= {ص ص ص، ص ص ك، ك ص ص، ك ص ك}

ب= {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ص ك ك، ك ص ص، ك ص ك ، ك ك ص}

جـ= {ص ص ص، ص ص ك، ص ك ص، ك ص ص}

د = {ك ص ص، ك ص ك، ك ك ص، ك ك ك}

$$ح(أ) = \frac{٤}{٨} \quad ، \quad ح(ب) = \frac{٧}{٨} \quad ، ح(جـ) = \frac{٤}{٨} \ ، ح(د) = \frac{٤}{٨}$$

$$أ \cap د = \{ك ص ص، ك ص ك\} \Longrightarrow ح(أ \cap د) = \frac{٢}{٨}$$

$$ح(أ \cup د) = ح(أ) + ح(د) - ح(أ \cap د) = \frac{٤}{٨} + \frac{٤}{٨} - \frac{٢}{٨} = \frac{٦}{٨}$$

٢) لحساب ح (أ$\cup$ب) فإن:

$$أ \cap ب = أ \Longrightarrow ح(أ \cap ب) = ح(أ) = \frac{٤}{٨}$$

$$ح(أ \cup ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ \cap ب)$$

$$= ح(ب) = \frac{٧}{٨}$$

ويترك الباقي كتمرين للطالب.

مثال (٢٥):

إحتمال أن يكون الجو عاصف في يوم ما هو ٠,٦ واحتمال أن يكون ممطر هو ٠,٥ واحتمال أن يكون عاصف وممطر هو ٠,٣ ما هو احتمال

١) أن يكون الجو عاصف أو ممطر أو كليهما.

٢) أن يكون الجو عاصف فقط.

الحل:

بفرض أن أ= حادث أن يكون الجو عاصف.

ب = حادث ان يكون الجو ممطر.

وبالتالي:

ح(أ) = ٠,٦ ، ح(ب) = ٠,٥ ، ح(أ∩ب) = ٠,٣

١) أ∪ب هي حادثة أن يكون الجو عاصف أو ممطر أو كليهما وبالتالي:

ح(أ∪ب) = ح(أ) + ح(ب) – ح(أ∩ب)

= ٠,٦ + ٠,٥ – ٠,٣ = ٠,٨

٢) أ∩$\overline{ب}$ هي حادثة أن يكون الجو عاصف فقط ح(أ∩$\overline{ب}$) = ح(أ) – ح(أ∩ب)

= ٠,٦–٠,٣ = ٠,٣

* القواعد الأساسية لطرق العد والتبادل

The principle conmting and Permutations

أولاً: أساسيات طرق العد

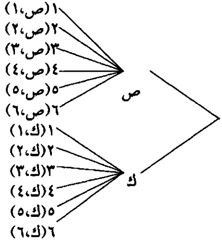
في معظم مسائل الإحتمال نحتاج دائماً لمعرفة عدد عناصر المجموعة المطلوب حساب الإحتمال لها وهذه العملية تكون في غاية الصعوبة خاصة إذا كان عدد العناصر المختار أكثر من عنصر. لذا يجب التعرف على الطرق الجيدة لعملية العد.

مثال (٢٦):

بفرض أن لدينا تجربة مكونة من مرحلتين المرحلة الأولى هي عملية إلقاء

عملية مرة واحدة والمرحلة التالية هي عملية إلقاء حجر نرد عليه الأرقام من ١ إلى ٦ فما هي النتائج الممكنة.

الحل:



فيكون عدد كل النتائج الممكنة هو ١٢ هو ناتج من عملية الضرب عدد نواتج المرحلة الأولى × عدد نواتج المرحلة الثانية أي ٢ × ٦

مثال (٢٧):

بفرض أن عملية إلقاء عملة ثم تكرارها إلى مرتين ثم إلقي حجر نرد مرة واحدة مما هو عدد النتائج الممكنة.

الحل:

في المرحلة الأولى والثانية تتم عملية إلقاء عملة مرتين ويكون عدد النتائج الممكنة هو ٢ × ٢ أما في المرحلة الثالثة فيتم إلقاء حجر نرد وعدد كل النواتج

لهذه المرحلة هو ٦ وبالتالي فإن عدد جميع النتائج في المراحل الثلاث هـو ٢× ٢× ٦= ٢٤

* قاعدة العد الأساسية **The principle Counting rule**:

بفرض أن لدينا تجربة تتكون من ك من المراحل (الخطوات). وكان ن١ هو عدد الطرق التي تتم به المرحلة الأولى. وكان ن٢ هو عدد الطرق الـذي تـتم بـه المرحلة الثانية. وهكذا إذا كان نك هو عدد الطرق الذي تم به المرحلة رقم ك بعد (ك -١) من المراحل فإن العدد الكلي للطرق المختلفـة الـتي يمكـن أن تقـع بهـا التجربة هي: ن١ × ن٢ × ن٣× .....×نك

مثال (٢٨):

إلقاء حجر نرد أربع مرات ما هو عدد النواتج الممكنة.

الحل:

عدد النتائج (الطرق) الممكنة هو ٦ × ٦× ٦× ٦

مثال (٢٩):

امتحان شهري يتكون من ثلاثة أسئلة إختيار من متعدد كل سؤال له أربع خيارات فما هو عدد الإجابات الممكنة لهذا الإختبار.

الحل:

لدينا ثلاثة أسئلة إختيار من متعدد كل سؤال هو مرحلة وكل سؤال يمكـن أن يجاب بأربع طرق وبالتالي فإن كل مرحلة مكونة من أربع نتائج ٤× ٤× ٤ = ٦٤ هي كل النتائج الممكنة لهذا الاختبار.

التبادل Permutations:

مثال (٣٠):

إذا كان لدينا خمسة حروف أ، ب، جـ د، هـ فكم عدد الكلمات الممكنة المكونة من ثلاثة حروف بشرط عدم تكرار أية حروف.

الحل:

بفرض أن لدينا ثلاثة أماكن هي الحروف المطلوب وضعها فيها المكان الأول يمكن أن يملئ بالحروف الخمسة أما المكان الثاني فيمكن أن يملئ بأربعة حروف. المكان الثالث يمكن أن يملئ بثلاثة حروف فقط وبالتالي باستخدام القاعدة الأساسية للعد. فإن عدد الطرق الممكنة لتكوين كلمة مكونة من ثلاثة حروف هو:

٥ × ٤ × ٣ = ٦٠ طريقة.

في هذا المثال قمنا باختيار ثلاثة حروف مختلفة من خمسة حروف ووضعهم بترتيب معين وتسمى هذه العملية بالتبديل (Permutation).

تعريف التبديل (Parmutation):

أي ترتيب أو سحب لـ ر من الأشياء مأخوذة بدون تكرار ومختارة من ن من الاشياء المختلفة يسمى بتبديل ن من الأشياء مأخوذة منها ر مرة واحدة وعدد مثل هذه التبديلات يرمز له بالرمز نمر وهو يساوي:

نمر = ن (ن-١) (ن-٢)....(ن-م+١)

مثال (٣١):

في المثال السابق كان لدينا ن = ٥ ومأخوذ منها ر = ٣ وبالتالي فإن عدد التبديلات الممكنة.

بدون تكرار هو: $٥م_٣ = ٥ (٥-١) (٥-٢) = ٦٠$

ويمكن كتابه عدد تبادل ن من الأشياء مأخوذ منها ر من الاشياء مرة واحدة دون تكرار كالآتي:

$ن م_ر = \frac{ن!}{(ن-ر)!}$ حيث ن! = ن(ن-١) (ن-٢).....٢. ١ يسمى مضروب (Factorial) ن حيث ن عدد صحيح موجب.

مثال (٣٢):

اوجد عدد التباديل لـ ٨ حروف مأخوذ منها ٣ حروف مرة واحدة (ما هو عدد الكلمات المكونة من ٣ حروف دون تكرار الحروف).

الحل:

عدد الكلمات المكونة من ٣ أحرف مأخوذة من ٨ أحرف دون تكرار هو:

$$٨م_٣ = \frac{٨!}{(٨-٣)!} = \frac{٨!}{٥!} = \frac{١.٢.٣.٤.٥.٦.٧.٨}{١.٢.٣.٤.٥} = ٣٣٦$$

مثال (٣٣):

كم زوج من الحروف يمكن أخذه من الحروب {أ، ب، جـ} دون تكرار أي منها.

الحل:

عدد تباديل ٣ حروف مأخوذ منها حرفان مرة واحدة هو $٣م_٢ = \frac{٣!}{(٣-٢)!} = ٦$

وهذه الكلمات هي أب، أجـ، ب أ، ب جـ، جـ أ، جـ ب.

* ملحوظة: إذا كانت ر = ن فإن $ن م_ن$ = ن! وبالتالي فإن عدد الطرق المختلفة لترتيب ن من العناصر المختلفة في صف هو ن!.

مثال (٣٤):

في المثال السابق إذا أردنا تكوين كلمات مكونة من ثلاث حروف فإن عدد هذه الكلمات هو ست كلمات حيث:

$٣م_٣ = ٣! = ٦$

وهي:

جـ ب أ، ب جـ أ، ب أ جـ، أ جـ ب، أ ب جـ، جـ أ ب

تعريف التوافيق Combinatorics :

عند اختيار ر من الاشياء من ن من الأشياء دون النظر عن ترتيب هذه العناصر وبدون تكرار هذه العناصر يسمى توافيق ن من الأشياء مأخوذ منها مرة أخرى ويرمز له بالرمز.

$\binom{ن}{ر} = \frac{ن!}{ر!(ن-ر)!}$ والتعبير $\binom{ن}{ر}$ يسمى معامل ذات الحدين Binomial Coefficient وذلك نسبة لنظرية ذات الحدين الشهيرة.

مثال (٣٥):

أوجد عدد الطرق لسحب رقمين من المجموعة أ= {١، ٢، ٣، ٤، ٥} دون النظر إلى الترتيب هذه المجموعة.

الحل:

عدد الطرق المطلوب لسحب رقمين من هذه المجموعة

$$= \binom{٥}{٢} = \frac{٥!}{٢!(٥-٢)!} = \frac{٥\times٤}{٢\times١} = ١٠ \text{ طرق}$$

مثال (٣٦):

أوجد كل التوافيق والتباديل للحروف أ، ب، جـ د عند اختيار ثلاثة منها مرة واحد.

الحل:

أولاً التباديل: عدد التباديل لأربع حروف مأخوذ منها ثلاثة مرة واحد هو:

$$٤م_{٣} = \frac{٤!}{(٤-٣)!} = ٢٤$$

وهي كالآتي:

أ ب جـ	أ جـ ب	ب أ جـ	ب جـ أ	جـ أ ب	جـ ب أ
أ ب د	أ د ب	ب أ د	ب د أ	د أ ب	د ب أ
أ جـ د	أ د جـ	جـ أ د	د أ ب	د أ جـ	د جـ أ
ب جـ د	ب د جـ	جـ ب د	د ب أ	د ب جـ	د جـ ب

وهي ٢٤ تبديل ويحذف العناصر التي تتكون من نفس الحروف لكنها مختلفة في ترتيبها فيتبقى أربع عناصر فقط هي كالآتي:

أ ب جـ ، أ ب د، أ جـ د، ب جـ د

هي كل التوافيق الممكنة وبالتالي فإن عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسوماً على مضروب ر $\binom{٤}{٣}=\frac{!٤}{!٣(٤-٣)!}=\frac{١.٢.٣.٤}{١.٢.٣}$ = ٤ وبالتالي فإن عدد التوافيق يساوي عدد التباديل مقسوم على مضروب ر.

مثال (٣٧):

إذا كان لدينا ١٠ أفراد ويراد تكوين لجنة منهم مكونة من ثلاثة أفراد فما هو عدد الطرق الممكنة لتكوين تلك اللجنة.

الحل:

حيث أن ترتيب الأفراد هنا لا يهم وبالتالي فإننا نريد حساب توافيق ١٠ أفراد منهم ٣ أفراد مرة واحدة.

$$\binom{١٠}{٣}=\frac{!١٠}{!٣!٧}=\frac{١٠.٩.٨}{١.٢.٣}=١٢٠$$

مثال (٣٨):

إذا كان لدينا ٢٠ رجل و ١٠ سيدات ويراد تشكيل لجنة مكونة من خمسة أفراد ثلاثة من الرجال وإثنان من السيدات فكم عدد الطرق لتكوين تلك اللجنة.

الحل:

تكوين اللجنة يمكن تقسيمها إلى مرحلتين:

المرحلة الأولى هي عملية اختيار الرجال أما المرحلة الثانية فهي عملية اختيار السيدات ويكون طريق $\binom{٢٠}{٣} = \frac{٢٠.١٩.١٨}{٣.٢.١} = ١١٤٠$ = عدد الطرق لإختيار ثلاثة رجال.

طريقة $\binom{١٠}{٢} = \frac{١٠.٩}{٢.١} = ٤٥$ = عدد الطرق لإختيار سيدتين.

وبالتالي فإن عدد الطرق المطلوب هو حاصل ضرب عدد الطرق في كلتا المرحليتن.

طريقة = ١١٤٠×٤٥ = ٥١٣٠٠ = عدد طرق تشكيل اللجنة.

وبالتالي فإن تشكيل اللجنة المكونة من ٣ رجال، ٢ سيدة يلزم ٥١٣٠٠ طريقة.

*** العلاقة بين التبادل والتوافيق:**

مما سبق يمكن القول بأن الفارق بين التباديل والتوافيق هو كلمة دون النظر للترتيب فالترتيب يزيد من الطرق ومن عدد الأشياء المكونة كمثال عدد الكلمات المكونة من حروف معينة أما عدم النظر إلى الترتيب يقلل من عدد هذه الكلمات وتكون العلاقة بين التبادل والتوافق كما قلنا سابقاً هي:

$$\binom{ن}{ر} = \frac{ن^{م}ر}{ر!}$$

أي أن: عدد الطرق الناتج من الترتيب (التباديل).

ر! × عدد الطرق الناتج دون النظر إلى الترتيب (توافيق).

مثال (٣٩):

في نظام تليفوني معمول به بأحد كليات جامعة الملك سعود كان يجب أن تكون أرقام كل تليفوناته لها الشكل أ ب جـ حيث الرموز أ، ب، جـ تأخذ القيم من ٠ إلى ٩ بحيث يكون أ < ب < جـ فكم رقم تليفون يمكن تكوينه بشرط أن تكون أرقامه تصاعدية.

الحل:

لتوضيح ما هو مطلوب في هذا المثال ليكن لدينا الأرقام ٠ و١ و٢ ويراد تكوين عدد تصاعدي منها فنجد أن جميع التبديل هي ١٠٢، ١٢٠، ٢٠١، ٢١٠، ٠٢١، وهي ست تباديل وبغض النظر عن الترتيب فإنه يمكن اعتبار الرقم ٠١٢ ممثل لكل هذه التباديل وبالمثل وبتكرار هذه العملية لجميع الأرقام الباقية مأخوذة ثلاثة بثلاثة نجد أن لكل ثلاثة أرقام يوجد عدد ٦ تباديل وبإختيار العنصر الذي يمثل هذه التباديل ويحقق الشرط المعطي فإننا نجد أن المطلوب هو إيجاد كل التباديل بغض النظر عن الترتيب أي حساب التوافيق ويكون عدد كل الأرقام المطلوبة هو $ل^{١٠}_{٣}$.

$$١٢٠ = \frac{٨ \times ٩ \times ١٠}{١ \times ٢ \times ٣} = \binom{١٠}{٣}$$

*** بعض العلاقات الهامة للتوافيق:**

قبل ذكر هذه العلاقات نعلم أن للتوافيق تطبيقات هامة في نظرية ذات

الحدين Binomid expunsion والتي تنص على أن لأي عدد صحيح موجب ن فإن:

$$(\text{أ}+\text{ب})^{\text{ن}} = \sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \text{أ}^{\text{ر}} \text{ب}^{\text{ن}-\text{ر}}$$

ويمكن برهنة العلاقات التالية:

١) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{ن}}{\text{ر}+1} = \binom{\text{ن}+1}{\text{ر}+1}$

٢) $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}$

٣) $\text{ر}\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \text{ن}\binom{\text{ن}-1}{\text{ر}-1}$

٤) $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} = 2^{\text{ن}}$

٥) $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} (-1)^{\text{ر}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} = 0$

٦) $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}} \text{ر}\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \text{ن}\,2^{\text{ن}-1}$

البرهان: إنظر الملحق بآخر هذا الفصل.

* وهناك علاقات أخرى هامة تذكرها فقط بدون برهان لأي أعداد صحيحة موجبة ل، ن، م فإن:

٧) $\binom{\text{م}}{\text{ر}} - \binom{\text{م}}{\text{ر}-1} = \binom{\text{م}-1}{\text{ر}-1} - \binom{\text{م}-1}{\text{ر}-2}$

٨) $\binom{\text{م}+\text{ر}-1}{\text{م}} = (-1)^{\text{م}} \binom{-\text{ر}}{\text{م}}$

٩) $\sum_{\text{ر}=0}^{\text{م}} \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \binom{\text{ل}}{\text{م}-\text{ر}} = \binom{\text{ن}+\text{ل}}{\text{م}}$

إذا كانت ن كبيرة أي أن ن ⟵ ∞ فإنه يمكن تقريب ن! باستخدام صيغة تسمى صيغة إستيرلنج Stirling's Formula وتعطى بالصورة.

$$\text{ن}! \approx \sqrt{2\pi}\ \text{ن}^{\text{ن}+\frac{1}{2}}\ \text{هـ}^{-\text{ن}}$$

حيث أن العلاقة ≈ تعني أن النسبة المكونة من كلا الطرفان تؤول من الواحد الصحيح عندما نقترب ن من المالانهاية.

طرق سحب العينة:

أ. سحب العينة بإرجاع **Sampling with replacement**:

عندما يعاد كل عنصر من عناصر العينة المسحوبة إلى المجتمع (فضاء العينة) مرة أخرى قبل سحب أي عنصر آخر فإن عملية السحب هذه تسمى سحب بإرجاع وفيها يظل حجم المجتمع ثابت في كل مرة يتم فيها السحب. فإذا أردنا سحب عينة بها ر من العناصر من مجموعة عناصر عددها ن حيث ن ≤ ر فإن العنصر الأول يتم سحبه بعدد ن من الطرق كذلك العنصر الثاني يتم سحبه بعدد ن من الطرق وهكذا فإن العنصر رقم ر يتم سحبه بعدد ن من الطرق وبذلك يكون عدد الطرق التي يتم سحب بها العينة تبعا لقانون العد هو حاصل ضرب عدد الطرق في كل مرحلة ويكون ن. ن. ن....... .ن = نʳ

مثال (٤٠):

إذا كان لدينا صندوق به ٥ كرات حمراء و ٣ بيضاء فما هو عدد الطرق لسحب عينة مكونة من كرتين: إذا كانت:

أ. الكرات حمراء

ب. الكرات البيضاء.

الحل:

أ. عدد الطرق لسحب كرتات حمراء = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة.

ب. عدد الطرق لسحب كرتات بيضاء = ٣ × ٣ = ٩ طرق.

ب. سحب العينة بدون إرجاع Sampling without replacement:

في هذه الطريقة لإيعاد العنصر المسحوب مرة أخرى إلى مجموعة العناصر المسحوب منها العنصر وبذلك يتناقص عددها في كل مرة يتم فيها السحب. العنصر الأول: يتم سحبه بعدد ن من الطرق العنصر الثاني يتم سحبه بعدد (ن-١) من الطرق وهكذا فإن العنصر رقم ر يتم سحبه بعدد (ن – ر +١) من الطرق وبذلك فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم سحب عينة جمعها ر هو حاصل ضرب عدد الطرق في كل مرحلة يتم فيها السحب ويكون مساوياً لـ:

ن(ن -١) (ن-٢) .... (ن – ر + ١).

* ملحوظة: أ. إذا كانت العينات المسحوبة غير مرتبة فإن عدد الطرق لسحب عينة جمعها ر بغض النظر عن ترتيب هو $\binom{ن}{ر}$ ولتسهيل عملية الكتابة سوف نكتب ل$^{ن}_{ر}$= $\binom{ن}{ر}$.

ب. إذا لم يذكر صراحة أن السحب تم بإرجاع فيفهم من ذلك أنه تم دون إرجاع.

مثال (٤١):

تم اختيار ٣ كتب عشوائياً من أحد الأرفق في مكتبة وكان يحتوي على ٤ كتب رياضيات، ٣ إحصاء وقاموس أوجد احتمالات:

أ. وجود قاموس بين المجموعة التي تم اختيارها.

ب. الحصول على كتابين رياضيات وكتاب إحصاء.

الحل:

عدد الطرق لسحب القاموس =ل$^{١}_{١}$ طريقة.

عدد الطرق لسحب كتابين بخلاف القاموس= $ل^{٧}_{٢}$ طريقة = ٢١ طريقة

عدد الطرق لسحب القاموس وسحب كتابين = $ل^{٧}_{٢} \times ل^{١}_{١}$ = ٢١ طريقة

عدد الطرق لسحب ثلاثة كتب عموماً.

= $ل^{٨}_{٣}$ = ٥٦ طريقة.

فإن كان أ هي حادثة سحب قاموس ضمن العينة فإن: ح(أ) = $\frac{٢١}{٥٦}$ = ٠,٣٧٥

عدد طرق سحب كتابين رياضيات = $ل^{٤}_{٢}$ = ٦ طرق.

عدد طرق سحب كتاب احصاء = $ل^{٣}_{١}$ = ٣ طرق.

فإذا كانت ب هي حادثة سحب كتابين رياضيات وكتاب إحصاء فإن عدد طرق وقوع الحادثة ب هو:

$ل^{٤}_{٢} \times ل^{٣}_{١}$ = ١٨ طريقة، ح(ب) = $\frac{١٨}{٥٦}$ = ٠,٣٢١

* ملحوظة: في (أ) يمكن حساب عدد الطرق بالطريقة الآتية ٢ إحصاء ولا شيء رياضيات وقاموس أو كتاب إحصاء كتاب رياضيات وقاموس أو كتابين رياضيات ولا شيء إحصاء وقاموس وهو ما كتابته كالآتي:

$$\left[\binom{٣}{٠}\binom{٤}{٢}+\binom{٣}{١}\binom{٤}{١}+\binom{٣}{٢}\binom{٤}{٠}\right]\binom{١}{١}$$

وباستخدام العلاقة (٩) فإن ل = ٣، ر = ٤، م =٢ فيكون الناتج.

$$٢١ = \binom{٧}{٢}\binom{١}{١}$$

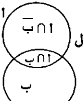
الملحق

برهان (١): تعتمد فكرة البرهان على كتابة المجموعة أ كإتحاد مجموعتين متنافيتين وبإستخدام شكل من المقابل فإن:

أ = (أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$)

واضح أن الحادثتين

أ ∩ ب، أ ∩ $\overline{\text{ب}}$ متنافيتان لأن



(أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) ∩ (أ ∩ ب) = Ø وباستخدام مسلمة الاحتمال الثالثة فإن:

ح(أ) = ح((أ ∩ ب) ∪ (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$))

= ح(أ ∩ ب) + (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$)

ح(أ ∩ $\overline{\text{ب}}$) = ح (أ) – ح(أ ∩ ب)

برهان (٢): يمكن كتابة إتحاد أي حادثتان بالصورة الآتية:

أ ∪ ب = ب ∪ (أ ∩ $\overline{\text{ب}}$)

لكن الحوادث

ب و أ ∩ $\overline{\text{ب}}$ حوادث متنافية وباستخدام مسلمة الاحتمال الثالثة فإن:

ح(أ∪ب) = ح(ب) + ح(أ ∩ $\overline{\text{ب}}$).......(١)

وباستخدام النظرية السابقة فإن:

ح(أ ∩ $\overline{ب}$) = ح(أ) − ح(أ ∩ ب)

وبالتعويض من معادلة (٢) في (١) ينتج البرهان.

برهان النتيجة:

١) لأي فضاء عينة ع فإن ع ∪ ϕ = ع وحيث أن ع، ϕ حادثتين متنافيتان فإن باستخدام مسلمة (٣) فإن:

ح(ع) = ح(ع) + ح(ϕ)

وباستخدام مسلمة (٢) فإن ح(ع) = ١

١ = ١ + ح(ϕ) $\Longleftarrow$ ح(ϕ) = ٠

٢) نعلم أن أ ∩ $\overline{أ}$ = ϕ أي أن أ، $\overline{أ}$ متنافيتين كذلك: ع = أ ∪ $\overline{أ}$

ح(ع) = ح(أ ∪ $\overline{أ}$)

باستخدام مسلمة (٣) فإن:

ح(ع) = ح(أ) + ح($\overline{أ}$) = ١

∴ ح(أ) = ١ − ح($\overline{أ}$) $\Longleftarrow$ ح($\overline{أ}$) = ١ − ح(أ)

٣) بكتابةب بدلالة حوتث متنافية

ب = أ ∪ (ب − أ)

ح(ب) = ح(أ) + ح(ب−أ)

لكن من مسلمة الإحتمال الأولى فإن:

ح(ب-أ) ≤ ٠ دائماً أي أن: ح(أ) ≥ ح(ب)

٤) بفرض أن د = ب ∪ جـ وبتطبيق نظرية (٢) على المجموعتين أ، د فإن

(أ) ح (أ∪د) = ح(أ) + ح(د) – ح (أ∩د)

لكننا نعلم من خواص المجموعات أن

أ∩د = أ∩ (ب∪جـ) = (أ∩ب) ∪ (أ∩جـ)

لكن لدينا

(ب) ح ((أ∩ب) ∪ (أ∩جـــــــ))= ح(أ∩ب)+ ح((أ∩جـــــــ) – ح(أ∩ب∩جـ)

بالتعويض من (ب) في (أ) ينتج البرهان:

* برهان بعض العلاقات الهامة للتوافيق:

١) لبرهنة $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{ن}}{\text{ر}+\text{١}} = \binom{\text{ن}+\text{١}}{\text{ر}+\text{١}}$ نعلم أن:

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} + \binom{\text{ن}}{\text{ر}+\text{١}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!(\text{ن}-\text{ر})!} + \frac{\text{ن}!}{(\text{ر}+\text{١})!(\text{ن}-\text{ر}-\text{١})!} = \frac{\text{ن}!(\text{ر}+\text{١}+\text{ن}-\text{ر})}{(\text{ر}+\text{١})!(\text{ن}-\text{ر})!}$$

$$= \frac{(\text{ن}+\text{١})\cdot\text{ن}!}{(\text{ر}+\text{١})!(\text{ن}-\text{ر})!} = \binom{\text{ن}+\text{١}}{\text{ر}+\text{١}}$$

٢) لبرهنة أن $\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \binom{\text{ن}}{\text{ن}-\text{ر}}$ يمكن استخدام التعريف الأساسي كالآتي:

$$\binom{ن}{ر}=\frac{ن!}{ر!(ن-١)!}$$

كذلك

$$\binom{ن}{ن-ر}=\frac{ن!}{(ن-ر)!ر!} \qquad \therefore \binom{ن}{ن-ر}=\frac{ن!}{(ن-ر)!ر!}=\binom{ن}{ر}$$

٣) نريد برهنة أن $ر\binom{ن}{ر}=ن\binom{ن-١}{ر-١}$

$$ر\binom{ن}{ر}=ر\cdot\frac{ن!}{(ن-ر)!ر!}=\frac{ن!}{(ر-١)!(ن-ر)!}=ن\frac{(ن-١)!}{(ر-١)!(ن-ر)!}=ن\binom{ن-١}{ر-١}$$

٤) باستخدام نظرية ذات الحدين، وبوضع أ = ب = ١ فإن:

$$(١+١)^{ن}=\sum_{ر=٠}^{ن}\binom{ن}{ر}(ر)^{ر}(١)^{ن-ر}، \qquad ٢^{ن}=\sum_{ر=٠}^{ن}\binom{ن}{ر}$$

٥) أيضاً باستخدام نفس النظرية بوضع أ = -١، ب = ١ فإن:

$$(-١+١)^{ن}=\sum_{ر=٠}^{ن}\binom{ن}{ر}(-١)^{ر}(١)^{ن-ر}$$

$$٠=\sum_{ر=٠}^{ن}\binom{ن}{ر}ل^{ن}_{ر}(-١)^{ن}$$

٦) نعلم أن $(س+ب)^{ن}=\sum_{ر=٠}^{ن}\binom{ن}{ر}س^{ر}ب^{ن-ر}$

بتفاضيل طرفي المعادلة السابقة بالنسبة لـ س فإن:

$ن(س+ب)^{ن-١}=\sum_{ر=٠}^{ن}ر\binom{ن}{ر}س^{ر-١}ب^{ن-ر}$ **ضع الآن ب = س = ١ فإن**

$$\text{ن}(1+1)^{\text{ن}-1}=\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\text{ر}\binom{\text{ن}}{\text{ر}} \Longrightarrow \text{ن}\,2^{\text{ن}-1}=\sum_{\text{ر}=0}^{\text{ن}}\text{ر}\binom{\text{ن}}{\text{ر}}$$

تمارين

١) إذا كان ع = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨} هو فضاء العينة عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة وكانت: أ: حادثة ظهور عدد زوجي و ب: حادثة ظهور عدد فردي وجـ: ظهور عدد يقبل القسمة على ٣ د: ظهور عدد يقبل القسمة على ٥ أوجد الحوادث الآتية:

أ. أ، ب، جـ د.

ب. $\overline{\text{أ}}$، $\overline{\text{ب}}$، $\overline{\text{جـ}}$، $\overline{\text{د}}$

جـ. أ∪ب، أ∩ب، أ−ب، ب −أ

د. ب ∩جـ ب∩ د، ب ∪ د، جـ ∪ ب

٢) في التمرين السابق عين الحوادث المركبة والبسيطة.

٣) قذفت قطعة نقود ثلاث مرات. أوجد الحوادث التالية. واحسب عدد عناصرها.

أ= {الحصول على صورة في الرمية الأولى}.

ب= {الحصول على كتابة في الرمية الأولى والثانية فقط}.

جـ= {الحصول على ثلاث صور في الرميات الثلاث}.

د = {الحصول على صورة واحدة على الأكثر}.

٤) إذا كان ع هو فضاء العينة الناتج عن إلقاء حجري نرد متميزين، كل حجر

منهم مكون من ستة أوجه مرقمة من ١ إلى ٦ أوجد ع.

أ = ظهور عددين متساوين على حجري نرد.

ب = العدد الأول ٣ والعدد الثاني زوجي.

جـ = مجموع العددين الظاهرين على حجري نرد ٨.

د = الفرق المطلق بين العددين الظاهرين هو ٣.

٥) في التمرين السابق أوجد ح(أ)، ح(ب)، ح(جـ)، ح(د).

٦) أوجد الفرق الدراسية تتكون من ١٥٠ طالب كانت نتائجهم في الاختبار كما يلي: ١٢٥ رسبوا في الاقتصاد ٥٠ رسبوا في الإحصاء، ٢٥ رسبوا في كلا المادتين ثم اختيار طالب عشوائياً من هذه الفرق أوجد الاحتمال:

أ. أن يكون الطالب رسب في الاقتصاد.

ب. أن يكون الطالب رسب في الإحصاء.

جـ. أن يكون الطالب رسب في المادتين معاً.

٧) بفرض أن أ، ب، جـ ثلاث حوادث تكون تجزئ لفضاء ما ع بحيث

ح(أ) = ح(ب)، ح(أ) = ٣ ح(جـ)

أوجد ح(أ)، ح(ب)، ح(جـ).

٨) بفرض أن ح(أ$\cup$ب)= $\frac{٥}{٦}$، ح(أ$\cap$ب)= $\frac{١}{٣}$ ، ح($\overline{ب}$)= $\frac{١}{٢}$ أوجد ح(أ)، ح(ب)

٩) صندوق يحتوي على ٦ كرات خضراء و ٤ كرات سوداء. سحبت كرتان بدون إرجاع فأوجد الإحتمالات الآتية:

أ. الكرة الأولى خضراء والثانية سوداء.

ب. الكرتان سوداء.

١٠) في فصل من فصول الحضانة كان به ١٠٠ تلميذ، كان عدد الأولاد ٧٥ وعدد البنات ٢٥ أوجد احتمال اختيار تلميذ ولد عشوائياً.

١١) بفرض أن ح(أ$\cap$ب̄) $=\frac{١}{٦}$ = ح(أ$\cap$ب)$=\frac{١}{٣}$، أ$\cup$ب = ع أوجد ح(ب$\cap$أ̄)، ح(أ)، ح(ب).

١٢) في فصل به ٩٥ طالب ٦٠ يدرسون الرياضيات، و٥٠ يدرسون الفيزياء و٣٠ يدرسون الأحياء فإذا كان ٢٥ يدرسون الرياضيات والفيزياء و١٠ يدرسون الفيزياء والأحياء و١٥ يدرسون الأحياء والرياضيات و٥ يدرسون الثلاث معاً. اختير طالب عشوائياً فما هو احتمال أن يكون الطالب من دارسي المواد الثلاث.

١٣) صندوق يحتوي على ٣ كرات بيضاء و٤ كرات سوداء و٥ حمراء. سحبت ثلاث كرات عشوائياً فأوجد الاحتمالات الآتية:

أ. الكرات الثلاث حمراء.

ب. كرتان سوداء وواحدة حمراء.

١٤) القي حجر نرد فأوجد الاحتمالات الآتية:

أ. مجموع الرقمين الظاهرين ٦.

ب. مجموع الرقمين ٦ أو العد الأول زوجي.

جـ. العددان متساويان.

د. العددان فرديان.

١٥) إذا كان لدينا ١٠ رجال و ٦ سيدات بكم طريقة يمكن بها تشكيل لجنة مكونة من ٤ رجال و٣ سيدات.

١٦) بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ أفراد على طاولة مستديرة.

١٧) بفرض أن أ وب وجـ ثلاث حوادث متنافية وتكون تجزئ لفضاء ما ع بحيث ح(جـ) = ١ / ٢، ح(أ) = ح(ب) فأوجد ح(أ)، ح(ب).

١٨) برهن لأي ثلاث حوادث أ، ب، جـ فإن = ح(أ∪ب∪جـ) = ح(أ) + ح(ب) + ح(جـ) – ح(أ∩ب) – ح(أ∩جـ) – ح(ب∩جـ) + ح(أ∩ب∩جـ).

١٩) قدر لشخصان هما أ، ب أن يتقابلا فيما بين الساعة الثالثة والرابعة بعد الظهر على أن لا ينتظر أي منهما الآخر أكثر من ١٥ دقيقة ما هو إحتمال أن يتقابلا.

٢٠) اختيرت نقطتان عشوائياً على خط مستقيم طوله أ >٠ أوجد إحتمال أن تكون الخطوط الثلاثة المكونة من ذلك يمكن أن تكون أضلاع مثلث.

٢١) صندوقان الأول يحتوي على ٤ كرات بيضاء و٢ سوداء أما الصندوق الثاني فيحوي ٣ بيضاء و٥ سوداء إذا سحبت كرة من كل صندوق أوجد إحتمال:

١. الكرتين بيضاء.

٢. الكرتين سوداء.

٣. كرة بيضاء وآخر سوداء.

الفصل الخامس

نظرية رول – نظرية التزايدات المحدودة – الأوضاع غير المعينة

الفصل الخامس

نظرية رول ـ نظرية التزايدات المحدودة ـ الأوضاع غير المعينة

تمهيد نظري:

١. نظرية رول:

إذا كا ق(س) تابعاً مستمراً ضمن المجال (أ، ب) وكان ق(أ) = ق(ب) وإذا كان لهذا التابع مشتق من أجل كل قيمة لـ س واقعة ضمن المجال المذكور، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد جـ واضع ضمن هذا المجال يكون من أجله مشتق التابع المفروض معدوماً.

٢. دستور التزايدات المحدودة:

إذا كان ق(س) تابعاً مستمراً ضمن المجال (أ، ب) وله مشتق من أجل كل قيمة لـ س ضمن هذا المجال فإنه يمكن إيجاد عدد جـ واقع ضمن المجال المذكور ويحقق العلاقة ق(ب) − ق(أ) = (ب−أ) قَ(جـ).

يسمى هذا الدستور أيضاً بدستور القيمة المتوسطة.

إذا فرصتنا أن القيممة المطلقة للمشتق قَ(س) محدودة ضمن المجال المذكور بعدد نرمز له بـ (|قَ(س)| < ك)ك وإذا كان $س_1$ و$س_2$ عددين واقعين ضمن المجال المذكور فإنه ينتج عن ذلك المتراجحة:

$$|ق(س_2) - ق(س_1)| < ك\ |س_2 - س_1|$$

٣. الاشكال غير المعينة:

أ. الشكل ÷: إذا انعدم كل من حدي الكسر $\frac{ق(س)}{ل(س)}$ من أجل س = أ فانه ليس لهذا الكسر أي معنى محدد من أجل هذه القيم ونقول إنه:

يمثل عدم تعيين من الشكل ÷.

ب. الشكل $\frac{\infty}{\infty}$. اذا سعى كل من حدي الكسر المذكور أعلاه إلى ∞ فإننا نقول أن الكسر يمثل من أجل س = أ عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

جـ. اذا انتهى أحد مضروبي الجداء ق(س). ل(س) إلى ∞ وانتهى الآخر إلى الصفر وذلك عندما يسعى المتحول س إلى قيمة معينة أ، فاننا نقول أن هذا الوضع يمثل عدم تعيين من الشكل .، ∞.

د. إذا كان لدينا تركيب جبري يأخذ من أجل قيمة ما لـ س، أحد الاوضاع: $^{\circ}$، ∞°، ∞، فاننا نقول إنه يمثل من اجل هذه القيمة شكلا من أشكال عدم التعين.

٤. قاعدة اوبيتال Hopital:

إن القيمة الحقيقة الكسر $\frac{ق(س)}{ل(س)}$ الذي ينعدم حداه من أي س = أ تساوي قيمة الكسر الناتج عن الكسر المفروض بابدال كل حد من حدية بمشتقه

$$\lim_{س \to أ} \frac{ق(س)}{ل(س)} = \lim_{س \to أ} \frac{ق'(س)}{ك'(س)}$$

يمكن تطبيق قاعدة اوبتال في الحالة الثانية من حالات عدم التعيين أي

عندما يسعى كل من ق(س) ل(س) إلى ∞ وذلك عندما ينتهي س إلى ا.

نعيد الحالة الثالثة إلى إحدى الحالتين الأولى والثانية وذلك بأن نكتب الجداء المفروض بالشكل ل(س) . ق(س) = ق(س): $\frac{1}{ل(س)}$

ويمكن عندها تطبيق قاعدة اوبتال إلى الشكل الجديد. أما الحالات الاخيرة فاننا نعيدها إلى سابقاتها بأن نأخذ بدلاً عنها الأشكال التي تنتج عنها بأخذ لوغارتم هذه التراكيب.

٥. مشتق تابع المركب:

ليكن التابع ص = ق(ي، ع، و) حيث ي، ع، و توابع لـ(س) ذات مشتقات. يبرهن أن مشتق ص يعطي العلاقة:

$$ص' = ق'_ي\ ي' + ق'_ع\ ع' + ق'_و\ و'$$

٦. الخطأ القياسي:

ليكن التابع ق(س) ولنفرض اننا نريد حساب قيمة لهذا التابع من أجل قيمة ما لـ س نرمز لها بـا ولنفرض أيضاً أننا لا نعرف القيمة الحقيقة لـا بل قيمة تقريبة ا' حيث ا-ا' < ε سنرتكب بنتجية هذا الحساب خطأ يساوي طبعاً إلى:

ق(ا) – ق(ا').

نسمى هذا الخطأ بالخطأ القياسي ويعطى إستناداً إلى دستور التزايدات المحدودة بالعلاقة:

$$ق(أ) - ق(أ') = (أ - أ') \, ق'(\propto)$$

حيث $\propto$ واقع في المجال (أ،أ'). إن لهذا الخطأ حداً اعلى يساوي جداء ع الحد الأعلى لـ(أ - أ') بـ أ الحد الأعلى لـ ق'(س) ضمن المجال (أ،أ').

تمارين محلولة:

١) حقق نظرية رول على التابع: ق(س) = س^{٣} − ٤س

يمكننا أن نكتب هذا التابع بالشكل ق(س) = س(س+٢) (س−٢) ونلاحظ أنه:

$$ق(-٢) = ق(٠) = ق(٢) = ٠$$

وأن مشتقة ق'(س) = ٣س^{٢} − ٤ موجود من أجل كل قيمة لـ س.

لأن المشتق ينعدم من أجل $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ و $\frac{+\sqrt{٣}}{٢}$ ونلاحظ بسهولة أن القيمة الأولى تحقق المتراجحة:

$$-٢ < \frac{-\sqrt{٣}}{٢} < ٠$$ وتحقق القيمة الثانية المتراجحة: $٠ < \frac{\sqrt{٣}}{٢} < ٢$.

٢) ليكن التابع ص = هـ^{س} حقق دستور التزايدات المحدودة على هذا التابع من أجل أ =١ و أ= ٠ تقول نظرية القيمة الوسطى (أو دستور التزايدات المحدودة) أنه يوجد ضمن المجال (أ،ب) عدد نرمز له بـ جـ يحقق العلاقة:

$$ق(ب) = ق(أ) + (ب - أ) \, ق'(جـ).$$

لقد فرضنا أن ق(ب) هـ^{١} = هـ، ق(أ)= هـ^{٠} = ١، ب − أ = ١

ومن المعلوم أن $ق'(س) = هـ^{س}$ والمطلوب ايجاد عدد جـ يحقق العلاقة:

$هـ = ١ + هـ^{جـ} \Longleftarrow$ أو $هـ^{جـ} = هـ - ١ \Longleftarrow$ جـ= لو (هـ -١)

إذا أخذنا ٢,٧١٨٢٨ قيمة تقريبية للعدد هـ فإنه يكون:

لو ١٠٧١ > لو (١ – هـ) > لو ١٠٧٢

ويكون

٠,٥٣٧ > جـ > ٠,٥٤٢

ومن الواضح أن جـ واقع ضمن المجال (٠، ١) وهذا ما يحقق دستور التزايدات المحدودة.

٣) حقق نظرية رول على التابع:

$ق(س) = (س-م)^{م} (س-ب)^{ن}$ حيث م،ن عددان صحيحان > ٠

ينعدم هذا التابع من أجل س = م و س = ب فلنبرهن أن مشتقة ينعدم من أجل قيمة لـ س واقعة ضمن المجال (م،ب)، إن مشتق هذا التابع هو:

$ق'(س) = (س-م)^{م-١}(س-ب)^{ن-١} \{(م+ن)\ س-م\ ب - ن\ م\}$ الذي ينعدم من أجل:

$س = \frac{م ب + ن م}{م + ن}$ من السهل البرهان أن هذه القيمة واقعة بين العددين م وب.

٤) ليكن التابع: $ق(س) = \frac{س + ٤}{س^{٢} + ١}$ والمطلوب حساب حد أعلى للخطأ القياسي.

الناتج عن حساب قيمة هذا التابع من أجل س = π وذلك نأخذ ٣,١٤ قيمة تقريبية للعدد π. بما أننا نعرف المرتبة العشرية الثانية في π فإنه يمكننا أن نكتب.

$$٣,١٤ < \pi < ٣,١٤٢$$

والخطأ المرتكب في π هو: $٢ \times ١٠^{-٣} < ٤$

لنحسب الآن أ الحد الأعلى لمشتق التابع ق(س) إن هذا المشتق هو:

$ق'(س) = \frac{١-١٢س^{٢}-٢س^{٣}}{(س^{٢}+١)^{٢}}$ إن من الصعب جداً ان نحسب النهاية العظمى لهذا التركيب لأنه يجب عندها ان ندرس تحولات هذا التركيب ضمن المجال (٣، ٣,٢) بل تكتفي بأخذ حد أعلى له، حاصل قسمة القيمة المطلقة لحد أعلى للصورة على القيمة المطلقة لحد أدنى للمخرج ومن السهل حساب الحد الأعلى للصورة بصورة صحيحة تماماً ولكن من المستحسن في مثل هذه الحسابات أن نرضى بقيمة قليلة الموافقة ولكنها سهلة الحساب. فبما ان س موجب فانه يمكننا ان نكتب:

$$|١-١٢س^{٢}-٢س^{٣}| < ١+١٢س^{٢}+س^{٣} < ١+١٢(٣،٢)^{٢} + ٢(٣،٢)^{٣}$$

إن هذه القيمة أصغر من ١٩٠.

أما المخرج فمن الواضح أنه موجب ومتزايد وتكون قيمته الصغرى في المجال (٢,٣، ٣) هو $(٣^{٣} + ١)^{٢} = ٢٨^{٢} = ٧٨٤$

يمكننا أن نأخذ أ = $\frac{١٩٠}{٧٨٤} = ٠,٢٤$ ومن المستحسن أن نزيد في هذا العدد

ونأخذه مساوياً ٢٥ , ٠ من أجل السهولة في الحساب.

نجد أخيراً، كحد أعلى للخطأ القياسي المرتكب: أ. ε = $\frac{٢ .(٢٥)}{١٠٠٠ .(١٠٠)} = \frac{٥}{١٠^{٤}}$ وهذا يعني أنه عندما نبدل العدد الحقيقي الصحيح: $\frac{\pi + ٤}{\pi^{٣} + ١}$ بالعدد التقريبي: $\frac{٣,١٤ + ٤}{(٣,١٤)^{٣} + ١}$ فاننا نرتكب خطأ لا يزيد على ٠٠٠٥ , ٠

٥) لنكتب دستور التزايدات المحدودة بالشكل:

ق(س+ل) = ق(س) + لق′(س+ θل).

٠ < θ < ١ يطلب حساب التابع ق(س) لتكون θ مستقلة عن س.

لنفرض ي = θ ل حيث ي تابع لـ ل فقط استناداً إلى فرض θ غير تابعة لـ س فيكون:

ق (س+ل) = ق(س) + ل ق′ (س+ي)

لنشتق هذه العلاقة بالنسبة لـ ل ثم بالنسبة لـ س ولنرمز بـ ي′ لمشتق ي بالنسبة لـ ل فنجد ق′ (س+ل) = ق′ (س+ي) + ل ي′ ق″ (س+ي)

ق′ (س+ل) = ق′(س) + ل ق″ (س+ي)

بعد أن نلاحظ، استناداً إلى خواص اشتقاق التوابع المركبة، ان مشتق ق(س+ل) بالنسبة لـ ل يساوي مشتقة بالنسبة لـ س.

لنكتب ان قيمتي ق′ (س+ل) متساويتان فنجد:

(١) ق′ (س+ل) – ق′ (س) = ل (١– ي′) ق″ (س+ل)

لنشتق العلاقة الأخيرة بالنسبة لـ س فنجد:

(٢) $\text{ق}''(\text{س}+\text{ل}) - \text{ق}''(\text{س}) = \text{ل}\,(١-\text{ي}')\,\text{ق}^{(٣)}(\text{س}+\text{ل})$

ونستنتج من العلاقتين (١)، (٢) العلاقة:

$$\frac{\text{ق}^{(٣)}(\text{س}+\text{ل})}{\text{ق}''(\text{س}+\text{ل})-\text{ق}''(\text{س})} = \frac{\text{ق}''(\text{س}+\text{ل})}{\text{ق}'(\text{س}+\text{ل})-\text{ق}'(\text{س})}$$

ان هذه العلاقة محققة مهما كانت قيمة س وهي محققة بصورة خاصة من اجل س= ٠ أي:

$\frac{\text{ق}^{(٣)}(\text{ي})}{\text{ق}''(\text{ي})-\text{ق}''(٠)} = \frac{\text{ق}''(\text{ل})}{\text{ق}'(\text{ل})-\text{ق}'(٠)}$ وإذا اخذنا التابع الأصلي للطرفين فاننا نجد:

$\text{ق}''(\text{ي}) - \text{ق}''(٠) = \text{جـ}\,[\text{ق}'(\text{ي}) - \text{ق}'(٠)]$ إذا فرضنا جـ = ٠ فانه يكون:

$\text{ق}''(\text{ي}) - \text{ق}''(٠)$ وهذا يعني أن ق(ي) ثلاثي حدود ويكون

$\text{ق}(\text{س}) = \text{أ} + \text{ب}\,\text{س} + \text{جـ}\,\text{س}^{٢}$

ومن السهل أن نبرهن أن هذا التابع يحقق الشرط المفروض ونجد أن θ مستقلة عن كل من س، ل وهي تساوي $\frac{١}{٢}$.

لنفرض الآن أن جـ $\neq$ ٠ فنحصل على المعادلة التفاضلية التالية بعد أن نفرض ص = $\text{ق}'(\text{ي})$.

$\text{صَ} - \text{جـ ص} + \text{جـ}_{١} = ٠$ ونجد التكامل العام: $\text{ص} = \text{قَ(ي)} = \frac{\text{جـ}_{١}}{\text{جـ}} + \text{جـ}_{٢}\,\text{هـ}^{\text{جـ س}}$ ويكون ق(ي) من الشكل.

$\text{ق(ي)} = \text{أ} + \text{ب ي} + \text{جـ هـ}^{\text{اي}}$ ونجد أخيراً: $\text{ق(س)} = \text{أ} + \text{ب س} + \text{جـ هـ}^{\text{اي}}$.

إذا وضعنا هذه القيمة في دستور التزايدات المحدودة فإننا نجد بسهولة قيمة:

$$\vartheta = \frac{١}{\text{ا ل}} \,.\, \text{لو}\, \frac{\text{هـ}^{\text{ال}} - ١}{\text{ا ل}}$$

٦) إذا فرضنا ا < ب برهن صحة العلاقتين:

أ. $\frac{\text{ب} - \text{ا}}{١ + \text{ب}^{٢}} < \text{قوس ظاب} - \text{قوس ظا ا} < \frac{\text{ب} - \text{ا}}{١ + \text{ا}^{٢}}$.

ب. $\frac{\pi}{٤} + \frac{٣}{٢٥} < \text{قوس ظا}\ \frac{٤}{٣} < \frac{\pi}{٤} + \frac{١}{٦}$

لنفرض: ق(س) = قوس ظاس ولنطبق على هذا التابع نظرية التزايدات المحدودة بعد ان نلاحظ أن: $\text{قَ(س)} = \frac{١}{١ + \text{س}^{٢}}$

$\text{ق(ب)} - \text{ق(ا)} = (\text{ب} - \text{ا})\ \text{قَ(جـ)} \ldots\ldots\ \text{ا} < \text{جـ} < \text{ب}$

$\text{قوس ظاب} - \text{قوس ظاا} = (\text{ب} - \text{ا})\ \frac{١}{١ + \text{جـ}^{٢}}$ بما أن جـ محصورة بين ا و ب فإن:

$١ + \text{ا}^{٢} < ١ + \text{جـ}^{٢} < ١ + \text{ب}^{٢}$ و $\frac{١}{١ + \text{ب}^{٢}} < \frac{١}{١ + \text{جـ}^{٢}} < \frac{١}{١ + \text{ا}^{٢}}$

ويكون أخيراً:

$$\frac{\text{ب}-\text{ا}}{١+\text{ب}^{٢}} < \text{قوس ظاب} - \text{قوس ظا ا} < \frac{\text{ب}-\text{ا}}{١+\text{ا}^{٢}}$$

لنفرض الآن ا= ١، ب = $\frac{٤}{٣}$ فتأخذ المتراجحة المضاعفة السابقة الشكل.

$\frac{٣}{٢٥} <$ قوس ظا $\frac{٣}{٤}$ – قوس ظا١ $< \frac{١}{٦}$ ومنه: $\frac{\pi}{٤}+\frac{٣}{٢٥} <$ قوس ظا $\frac{٤}{٣} < \frac{\pi}{٤}+\frac{١}{٦}$

٧) ليكن التابع ق(س) = ١– (س–١)$^{\frac{٢}{٣}}$ حيث ٠ ≥ س ≥ ٢ لماذا لا يمكن تطبيق نظرية رول على هذا التابع؟

إن شروط تطبيق نظرية رول على تابع ما هي أن يكون هذا التابع معيناً ومستمراً ضمن المجال المفروض وأن يكون له مشتق (محدود) من أجل كل قيمة من قيم (ا،ب) وأن يكون:

ق(ا) = ق(ب). إن التابع المفروض مستمر في المجال (٠، ٢) وق(٠) = ق(٢) = ٠ ولكن مشتقه: ق َ(س) = $\frac{-٢}{٣(\text{س}-١)^{\frac{١}{٣}}}$

غير مستمر ولا محدود من أجل س = ١ لذا لا يمكن إيجاد قيمة لـ س واقعة ضمن المجال (٠، ٢) تجعل ق َ(س) معدوماً.

٨) طبق قاعدة اوبيتال واحسب: نهـا$_{\text{س}\to}$ $\frac{١-٢\,\text{جتاس}+\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

نجد على التوالي بعد ان ترمز للكسر المفروض بالشكل: $\frac{\text{ق(س)}}{\text{ل(س)}}$

$$\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{ق(س)}{ل(س)}=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{ق'(س)}{ل'(س)}=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{٢جاس-٢جاس\ جتاس}{٤س^{٣}}=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{٢جاس-جا٢س}{٤س^{٣}}$$

$$=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{ق''(س)}{ل''(س)}=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{٢\ جاس-٢\ جتا٢س}{١٢س^{٢}}$$

$$=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{ق^{(٣)}(س)}{ل^{(٣)}(س)}=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{-٢جاس-٤جا٢س}{٢٤س}$$

$$=\underset{س\leftarrow}{\text{نهـا}}\frac{ق^{(٤)}(س)}{ق^{(٤)}(س)}=\frac{-٢\ جتاس+٨\ جتاس}{٢٤}=\frac{-٢+٨}{٢٤}=\frac{١}{٤}$$

لقد طبقنا قاعدة اوبيتال اربع مرات لأنه نتج عن تطبيقها في المرات الثلاث الأولى اوضاع عدم تعيين من الشكل ÷

٩) احسب نهاية الكسر التالي وذلك عندما يسعى س إلى (+∞): $\frac{لوس}{س}$ عندما يسعى س إلى (+∞) فإن الكسر المفروض يأخذ الشكل $\frac{\infty}{\infty}$

لنطبق عليه قاعدة اوبيتال فنجد: $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}}\frac{لوس}{س}=\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}}\frac{\frac{١}{س}}{١}=٠$

١٠) احسب $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}}\frac{س^{٢}}{هـ^{س}}$: **عندما تسعى س إلى (∞) يأخذ الكسر الشكل $\frac{\infty}{\infty}$**

لنطبق قاعدة أوبيتال فنجد $\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}}\frac{س^{٢}}{هـ^{س}}=\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢س}{هـ^{س}}=\underset{س\leftarrow\infty}{\text{نهـا}}\frac{٢}{هـ^{س}}=٠$

١١) أحسب: $\underset{س\leftarrow\frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}}$ قاس − ظاس عندما **ينتهي المتحول س إلى $\frac{\pi}{٢}$ فإن التركيب المفروض يأخذ الشكل ∞ − ∞ لنطبق قاعدة أوبيتال على هذا التركيب الذي يمكن كتابته بالشكل:**

: $\text{قا س} - \text{ظا س} = \frac{1}{\text{جتا س}} - \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{1 - \text{جا س}}{\text{جتا س}}$ نلاحظ أن الكسر الأخير يأخذ الشكل ÷ عندما يسعى س إلى $\frac{\pi}{2}$ فلنطبق عليه قاعدة اوبتال:

$$\lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} (\text{قا س} - \text{ظا س}) = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا س}}{\text{جتا س}} = \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا س}}{\text{جا س}} = 0$$

١٢) احسب القيمة الحقيقية للتركيب $\text{س}^2 \text{هـ}^{-\text{س}}$ وذلك عندما يسعى س إلى ∞.

عندما ينتهي س إلى ∞ يأخذ هذا التركيب الوضع غير المعين (٠) ∞ويمكن كتابة التركيب المفروض بالشكل:

$\lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^2 \text{هـ}^{-\text{س}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{\text{س}^2}{\text{هـ}^{\text{س}}}$ الذي يأخذ الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عندما تسعى س إلى∞ .

لنطبق قاعدة اوبيتال فنجد:

$$\lim_{\text{س} \to \infty} \text{س}^2 \text{هـ}^{-\text{س}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}} = \lim_{\text{س} \to \infty} \frac{2}{\text{هـ}^{\text{س}}} = 0$$

١٣) احسب القيمة الحقيقية للتركيب س.لوس وذلك عندما يسعى س إلى ٠
يمكن كتابة هذا التركيب بالشكل التالي ونطبق عليه قاعدة اوبيتال:

$$\lim_{\text{س} \to 0} \frac{\text{لو س}}{1/\text{س}} = \lim_{\text{س} \to 0} \frac{1/\text{س}}{-1/\text{س}^2} = \lim_{\text{س} \to 0} (-\text{س}) = 0$$

يجب أن نأخذ في هذا المثال النهاية من يمين الصفر لأنه لا يوجد لوغاريتم للاعداد السالبة.

١٤) احسب نهاية التركيب ص = س جا س وذلك عندما يسعى س نحو الصفر.

يأخذ هذا التركيب الشكل $(0)^{0}$ عندما يسعى س نحو الصفر ويمكن تحويله إلى شكل يطبق عليه قاعدة أوبيتال بأخذ لوغاريتم طرفي هذه العلاقة:

$$\text{لوص} = \text{جاس} \,.\, \text{لوس} = \frac{\text{لوس}}{\text{جتا قاس}}$$

$$\lim_{\text{س}\to 0}\text{نها لوص} = \text{نها}_{\text{س}\to 0}\frac{\frac{1}{\text{س}}}{-\ \text{جتا قاس ظتا ظاس}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0}\frac{-\text{جاس ظاس}}{\text{س}} = 0$$

ويكون $\text{نها}_{\text{س}\to 0}\text{ص} = \text{هـ}^{0} = 1$

١٥) احسب نهاية التركيب ص = $(\text{ظتا ظاس})^{\text{س}}$ وذلك عندما يسعى س إلى الصفر.

عندما يسعى س إلى الصفر يأخذ هذا التركيب الوضع ∞^{0}. نأخذ لغاريتم الطرفين فنجد:

$$\text{لوص} = \text{س لو ظتا ظاس س} = \frac{\text{لو ظتاظاس}}{\frac{1}{\text{س}}}$$

عندما نجعل س $\longrightarrow$ ٠، يأخذ الكسر الاخير الوضع غير المعين $\frac{\infty}{\infty}$ فلنطب عليه قاعدة اوبيتال:

$$\text{نها}_{\text{س}\to 0}\text{لوص} = \text{نها}_{\text{س}\to 0}\frac{-\ \text{جتا قا}^{2}\text{س}}{\text{ظتا ظا س}} : \frac{-1}{\text{س}^{2}} = \text{نها}_{\text{س}\to 0}\frac{\text{س}^{2}\ \text{جتا قا}^{2}\text{س}}{\text{ظتا ظا س}}$$

$$= \text{نها}_{\text{س}\to 0}\frac{\text{س}^{2}}{\text{جا}^{2}\text{س}}\,.\,\text{ظاس} = 1.(0) = 0$$

أي: $\text{نها لوص} = 0$ و : $\text{نها}_{\text{س}\to 0}\text{ص} = 1$

١٦) احسب نهاية التركيب $ص = س^{\frac{١}{١-س}}$ وذلك عندما يسعى س إلى الواحد.
عندما يسعى س إلى الواحد يأخذ التركيب المفروض الشكل ١^{∞} فلنأخذ لغرايتم طرفي العلاقة المفروضة فنجد:

$$\text{لوص} = \frac{\text{لو } س}{١-س}$$

ان الطرف الثاني من هذه العلاقة يأخذ الشكل ÷ عندما تجعل س تنتهي إلى الواحد فلنطبق قاعدة اوبيتال:

$$\underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \text{ لو } ص = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو } س}{١-س} = \underset{س \to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{س}}{-١} = -١$$

ويكون: $\text{نها } ص = هـ^{-١} = \frac{١}{هـ}$

تمارين:

١٧) حقق نظرية رول من أجل التابع: $ق(س)=س^{٢}(١-س^{٢})$، $٠ \leq س \leq ١$

١٨) برهن أنه يوجد بين كل جذرين حقيقين للمعادلة: $هـ^{س}\text{جاس}=١$، جذر حقيقي للمعادلة: $هـ^{س}\text{جتاس}+١=٠$

١٩) إذا كان $٠ < أ < ب$ برهن صحة العلاقة: $١-\frac{أ}{ب} < \text{لو}\frac{ب}{أ} < \frac{ب}{أ}-١$ استنتج من العلاقة السابقة صحة العلاقة: $\frac{١}{٦} < \text{لو}١,٢ < \frac{١}{٥}$

٢٠) برهن استناداً إلى دستور التزايدات المحدودة، صحة العلاقة:

$\frac{\pi}{٦}+\frac{\sqrt{٣}}{١٥} <$ قوس جا ٠,٦ $< \frac{\pi}{٦}+\frac{١}{٨}$

٢١) حقق نظرية رول على التوابع التالية: ق(س) = س^{٣} − س^{٢} − ٤س + ٤، ق(س) = ١٦س − س^{٢} ق(ت) = جتا (ت/ ٢)، ق(ت) = جا ت

٢٢) برهن ان نظرية رول لا يمكن تطبيقها على التوابع التالية ضمن المجالات المرافقة وبين أسباب ذلك:

−١ ≤ س ≤ ١ : ق(س) = ١−س $^{\frac{٢}{٣}}$ ، −١ ≤ س ≤ +١: ق(س) = س

٠ ≤ س ≤ π : ق(س) = ظا س

٢٣) حقق نظرية التزايدات المحدودة على التوابع التالية:

−١ ≤ س ≤ ٢: ق(س) = س^{٣} − ٢س + ٤ ، −١≤ س≤ ٢: ق(س) = س^{٣}

−١ ≤ ت ≤ ٢ : ق(ت) = هـ^{ت} ، −٢≤ س≤ ٣: ق(س)=س^{٣}− ٣س+٢

٣٠° ≤ ت ≤ ٦٠°: ق(ت) = جا ت ، $\frac{١}{٢}$ ≤ ت ≤ ٢: ق(ت) = لو ت

−١ ≤ت≤ ٣: ق (٣)= جتا ت

* احسب النهايات الآتية وتحقق من الأجوبة المبينة بعد هذه المجموعة من التمارين:

٢٤) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{لو}(س^{٢}+١)}{س^{٣}}$ ٢٥) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}}$ $\frac{\text{لو س}}{هـ^{س}}$

٢٦) $\underset{س \to -\infty}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{-س}}{س}$

٢٧) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{س}-١}{س}$

٢٨) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{س}+١}{هـ^{س}-١}$

٢٩) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{هـ^{س}}{س^{٢}}$

٣٠) $\underset{\varphi \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}\varphi-\text{ظا}\varphi}{\varphi^{٢}}$

٣١) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا } س-١}{س^{٢}}$

٣٢) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } س}{س}$

٣٣) $\underset{س \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ظا } س}{س}$

٣٤) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا } س}{س}$

٣٥) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا } س}{س^{٣}}$

٣٦) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{جتا } س}{س^{ن}}$ **(ن عدد صحيح موجب)**

٣٧) $\underset{ع \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{وتر جا } ع}{ع}$

٣٨) $\underset{ع \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{وتر ظا } ع}{ع}$

٣٩) $\underset{\theta \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\theta-\text{جا}\theta}{\theta-\text{ظا}\theta}$

٤٠) $\underset{س \to \infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{لو } س}{\sqrt{س}}$

الاجوبة:

٢٤) (∞) ، ٢٦) ($-\infty$) ، ٢٨) (١)

٣٠) (٠) ، ٣١) ($\frac{١}{٢}$) ، ٣٣) (١)

٣٥) (∞) ، ٣٧) (١) ، ٣٩) ($\frac{-١}{٢}$)

احسب القيم الحقيقية للتراكيب التالية من اجل القيمة المرافقة لكـل منهـا وتحقق من الجواب المثبت بجانب بعضها:

٤١) $\frac{٢}{\text{جا}^{٢}\theta} - \frac{١}{١ - \text{جتا}\theta}$ ، $\theta = ٠$ $\quad$ ج $= \frac{-١}{٢}$

٤٢) $\frac{\text{ص}+١}{\text{ص}} - \frac{١}{\text{لو}(\text{ص}+١)}$ ، ص $= ٠$ $\quad$ ج $= \frac{-١}{٢}$

٤٣) $\frac{١}{\text{ص}} - \frac{١}{\text{هـ}^{\text{ص}} - ١}$ ، ص $= ٠$

٤٤) $\sqrt{\text{س}}$ لو س، س $= ٠$ $\quad$ ج $= ٠$

٤٥) س لو جا س، س $= ٠$

٤٦) α ظتا ظا α، $\alpha = ٠$ ، ج $= ١$

٤٧) $\text{س}^{\text{س}}$ ، س $= ٠$

٤٨) $(\text{جاس})^{\text{س}}$، س $= ٠$ ، ج $= ١$

٤٩) $(\text{جاس})^{\text{س}}$ ، س $= ٠$ ، ج $= ١$

٥٠) $(\text{ظتا ظاس})^{\text{ظاس}}$ ، س $= ٠$

٥١) $(١+\text{ك س})^{\frac{١}{\text{س}}}$ ، س $= ٠$ ، جـ $= \text{هـ}^{\text{ك}}$

٥٢) $\left(\text{هـ}^{\frac{١}{\text{س}}} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{\text{س}}$، س $\to \infty$ ، ج $= \text{هـ}^{٢}$

الفصل السادس

طرق إيجاد مقدرات النقطة

الفصل السادس

طرق إيجاد مقدرات النقطة

مقدمة:

علمنا سابقاً الخواص التي نريد لمقدر نقطي أن يتصف بها وأظهرنا أن المقدر الجيد بشكل عام هو الذي تتوفر فيه الصفات الآتية:

١. الكفاية.

٢. عدم التحيز.

٣. الإتساف.

٤. الكفاءة.

وهناك عدة طرق تعطي مقدرات تتصف بكل أو بعض تلك الصفات. وفي هذا الفصل سندرس بعض الطرق الشائعة الاستخدام في الإحصاء للحصول على المقدرات.

طريقة المعقولية العظمة Maximum Likelihood method:

في مقالتين نشرتا عام ١٩٢٠م، عرض فيهما العالم فيشر (R.A.Fisher) أحد رواد الإحصاء في عصرنا طريقة عامة للتقدير أطلق عليها اسم "طريقة المعقولية العظمى" أو "الإمكان الأكبر"، كما بين مميزات هذه الطريقة. نعتبر طريقة

المعقولية العظمى إحدى أهم وأكثر الطرق انتشاراً في الإحصاء لتقدير معالم التوزيع الاحتمالي الإحصائي (النموذج الإحصائي) المقترح.

إذا كانت س = (س١، .....، سن) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه الاحتمالي ق(س؛ θ)، فإننا سنرمز لمقدار المعلمة θ الذي نحصل عليه باستخدام طريقة المعقولية العظمى بـ $\hat{\theta}$(س)، كما سنرمز لمقدر دالة معلمية $\tau(\theta)$بـ $\hat{\tau} = \hat{\tau}$(س)، ومن ثم التقدير بنقطة الموافق لعينة مشاهدة س= (س١، .....، سن) بـ $\hat{\theta} = \hat{\theta}$(س) و $\hat{\tau} = \hat{\tau}$(س) على الترتيب.

لتكن س= (س١، .....، سن) عينة عشوائية من التوزيع:

$L(\zeta) \in$ ق{ق(س؛θ)؛ $\theta \in \Theta$}

و L(س؛θ) دالة المعقولية من أجل قيمة ملاحظة س= (س١، .....، سن) للعينة س.

تعريف: تدعى القيمة (النقطة) $\hat{\theta}$(س) $\in \Theta$ بتقدير المعقولية العظمة للمعلمة θ، إذا كانت دالة المعقولية L(س؛θ) تبلغ نهايتها العظمى عندها، أي أن

ل(س؛$\hat{\theta}$) $\geq$ ل(س؛θ) ؛ $\forall \theta \in \Theta$ ....(١)

أو:

ل(س؛$\hat{\theta}$) = قيمة قصوى ل (س، θ)
$\theta \in \Theta$

وهذا يعني أن التقدير $\hat{\theta}$ في حالة التوزيعات المتقطعة عبارة عن قيمة θ التي تجعل احتمال سحب العينة المشاهدة س(قيمة لـ س) أكبر ما يمكن. أما بالنسبة للتوزيعات المستمرة فإن قيمة θ التي تجعل احتمال الحصول على مفردات

العينة س قريبة جداً من القيم التي حصلنا عليها (القيم $س_1$، ....$س_ن$) أكبر ما يمكن ويمكن تفسير ما سبق على النحو الآتي:

إذا فرضنا أن θ ملعومة ولتكن θ_0، فإن قيمة س التي يكون وقوعها أو تحققها أكثر احتمالاً هي تلك القيمة ولنرمز لها بـ $س َ$= ($س َ_1$،....،$س َ_ن$) التي تجعل الدالة ل($س؛\theta_0$) أعظم ما يمكن. وعندما نأخذ θ قيمها الممكنة في فضاء المعلمة θ فإنها تعرف من أجل قيمة $\theta \in \theta$ دالة كثافة (أو دالة الاحتمال) معينة وبالتالي مجتمعاً معيناً. وبعد الحصول فعلاً على قيمة مشاهدة س= ($س_1$،....،$س_ن$) للعينة س=($س_1$،....،$س_ن$)، فإننا نرغب في معرفة لك المجتمع الذي يمكن أن يعطي ممثل تلك العينة المشاهدة س بأكبر احتمال ممكن، أي نريد إيجاد قيمة لـ θ من θ (نرمز لها بـ $\hat{\theta}$) تجعل دالة المعقولية ل($س؛\theta$) عندها في نهايتها العظمى. وقيمة $\hat{\theta}$ هذه ستكون بشكل عام دالة في س = ($س_1$،....،$س_ن$) تسمى تقدير المعقولية العظمى و $\hat{\theta}$(س) بمقدر المعقولية العظمى.

إذا كان من أجل كل قيمة س $\in$ ك دالة المعقولية ل($س؛\theta$) تبلغ نهايتها العظمى عند نقطة داخلية من فضاء المعلمة θ وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـθ، فإن تقدير المعقولية العظمى $\hat{\theta} = \hat{\theta}$(س) يحقق المعادلة:

$$\frac{\text{د ل(س؛}\theta)}{\text{د}\theta} = 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\text{د لو}_{\text{هـ}}\text{ ل(س؛}\theta)}{\text{د}\theta} = 0 \quad ....(٢)$$

بالإضافة إلى المتباينة:

$$\frac{\text{د}^{2}\text{ل(س؛}\theta)}{\text{د}\theta^{2}} < 0 \quad \text{أو} \quad \frac{\text{د}^{2}\text{ لو}_{\text{هـ}}\text{ ل(س؛}\theta)}{\text{د}\theta^{2}} < 0 \quad ....(٣)$$

وهذا يعني، أننا نحصل على التقدير $\hat{\theta}$ بحل المعادلة (٢) بعد التأكد من تحقق المتباينة (٣).

أما إذا كانت المعلمة θ متعددة الأبعاد، أي $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r)$، فإن التقدير $\hat{\theta}$ نحصل عليه بحل منظومة المعادلات:

$$\frac{د ل(س؛\theta)}{د\theta_ي} = ٠ \quad ؛ ي = ١، ٢، \ldots، ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(٤)$$

أو $\frac{د \, لو_هـ ل(س؛\theta)}{د\theta_ي} = ٠$ ، ي = ١، ٢، ...،ر التي تدعى بمعادلات المعقولية.

لنرى الآن بعض الأمثلة لإيجاد مقدّرات المعقولية العظمى.

مثال(١):

إذا كان س=(س١،...،سن) عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه الاحتمالية:

$ق(س،\theta) = \theta هـ^{-\theta س}$؛ س > ٠ ، θ > ٠ فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ.

بما أن: $ل(س؛\theta) = \theta^ن هـ^{-\theta \sum س_ي}$ فإن

$$لو_هـ ل(س؛\theta) = ن \, لو_هـ\theta - \theta\sum س_ي \Longleftarrow \frac{د \, لو_هـ ل(س؛\theta)}{د\theta} = \frac{ن}{\theta} - \sum س_ي$$

وبوضع $\frac{د \, لو_هـ ل(س؛\theta)}{د\theta} = ٠$ نجد $\Longleftarrow \frac{ن}{\theta} - \sum س_ي = ٠$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ θ نحصل على تقدير المعقولية العظمى:

$\hat{\theta} = \hat{\theta}(س) = \frac{ن}{\sum س_ي} = \frac{١}{\bar{س}}$ ومن ثم فإن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو:

$\hat{\theta}(س) = \frac{١}{\bar{س}}$.

مثال (٢):

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية من توزيع بواسون $\Pi(\theta)$، فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ.

بما أن: $\text{ق}(\text{س};\theta) = \frac{\theta^{\text{س}}}{\text{س}_{\text{ي}}!}\,\text{هـ}^{-\theta}$ ؛ س = ٠، ١، ٢، .....

فإن: $\text{ل}(\text{س};\theta) = \frac{\theta^{\sum \text{س}_{\text{ي}}}}{\prod \text{س}_{\text{ي}}!}\,\text{هـ}^{-\text{ن}\theta}$

$\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س};\theta) = -\text{ن}\theta + \sum \text{س}_{\text{ي}}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\theta - \sum \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}_{\text{ي}}!)$ وبالتالي:

$\frac{\text{د}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س};\theta)}{\text{د}\theta} = -\text{ن} + \frac{\sum \text{س}_{\text{ي}}}{\theta}$ بوضع $\frac{\text{د}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س};\theta)}{\text{د}\theta} = ٠$ وحلها بالنسبة لـ θ نجد:

$$-\text{ن} + \frac{\sum \text{س}_{\text{ي}}}{\theta} = ٠ \quad \Longleftarrow \quad \hat{\theta} = \hat{\theta}(\text{س}) = \frac{\sum \text{س}_{\text{ي}}}{\text{ن}} = \bar{\text{س}}$$

ومقدر المعقولية العظمى لـ θ يكون: $\hat{\theta}(\text{س}) = \bar{\text{س}}$

ونلاحظ بسهولة أن $\bar{\text{س}}$ مقدر غير متحيز لـ θ.

مثال (٣):

لتكن س=(س١،....سن) عينة عشوائية من توزيع ن(μ،θ^2) ونرغب في إيجاد مقدر المعقولية العظمى لـ θ^2.

كما نعلم $\text{ق}(\text{س};\theta) = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}}\,\text{هـ}^{\frac{1}{2\theta^2}(\text{س}-\mu)^2}$

وعلى ذلك: $\text{ل}(\text{س};\theta) = (2\pi \text{هـ}^{2})^{-\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2\theta^{2}}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)^{2}}$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س};\theta) = -\frac{\text{ن}}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ 2\pi - \frac{\text{ن}}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \theta^{2} - \frac{1}{2\theta^{2}}\sum(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)^{2}$$

$$\frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س};\theta)}{\text{د}\theta} = \frac{-\text{ن}}{2\theta^{2}} + \frac{1}{2\theta^{4}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)^{2} = 0$$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ θ^{2} نجد $\hat{\theta}^{2}(\text{س}) = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)^{2}$ وهو مقدر غير متحيز لـ θ^{2}.

مثال (٤):

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع ن$(\theta_{1},\theta_{2}^{2})$ فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلة $\theta = (\theta_{1},\theta_{2}^{2})$.

بما أن: $\text{ق}(\text{س};\theta) = \frac{1}{\theta_{2}\sqrt{2\pi}}\ \text{هـ}^{-\frac{1}{2\theta_{2}^{2}}(\text{س}-\theta_{1})^{2}}$ ؛ $\theta=(\theta_{1},\theta_{2}^{2})$

فإن: $\text{ل}(\text{س};\theta) = (2\pi)^{-\frac{\text{ن}}{2}}(\theta_{2}^{2})^{-\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{هـ}^{\frac{-1}{2\theta_{2}^{2}}(\text{س}_{\text{ي}}-\theta_{1})^{2}}$

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س};\theta) = -\frac{\text{ن}}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ 2\pi - \frac{\text{ن}}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \theta_{2}^{2} - \frac{1}{2\theta_{2}^{2}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\theta_{1})^{2}$$

$$= -\frac{\text{ن}}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ 2\pi - \frac{\text{ن}}{2}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \theta_{2}^{2} - \frac{1}{2\theta_{2}^{2}}\text{م}^{2} + \frac{\text{ن}(\overline{\text{س}}-\theta_{1})^{2}}{2\theta_{2}^{2}}$$

حيث أن $\text{م}^{2} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\overline{\text{س}})^{2}$ القيمة الملاحظة لتباين العينة م^{2}.

وعلى ذلك نجد: $\frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س};\theta)}{\text{د}\theta_{1}} = \frac{\text{ن}(\overline{\text{س}}-\theta_{1})}{\theta_{2}^{2}} = 0$

$$\frac{d\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س};\theta)}{d\theta_2^2} = \frac{-\text{ن}}{\theta_2^2} + \frac{\text{ن}}{2\theta_2^4}\text{م}^2 + \text{ن}\frac{(\bar{\text{س}}-\theta_1)^2}{2\theta_2^4} = 0$$

وبحل جملة المعادلتين نحصل على تقديري المعقولية العظمى:

$\hat{\theta}_1 = (\text{س}) = \bar{\text{س}}$ ، $\hat{\theta}_2^2(\text{س}) = \text{م}^2$ ومن ثم مقدري المعقولية العظمى:

$$\hat{\theta}_1 = (\text{س}) = \bar{\text{س}} \ ، \ \hat{\theta}_2^2(\text{س}) = \text{م}^2$$

إن المقدر $\bar{\text{س}}$ لـ θ_1 غير متحيز بينما الإحصاء م^2 مقدر لـ θ_2^2 متحيز. وبالتالي فإن مقدر المعقولية العظمى لـ θ موجود ووحيد $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2^2) = (\bar{\text{س}}, \text{م}^2)$ وهذا المقدر حاله في الإحصاء الكافي ت=(ت$_1$، ت$_2$)، حيث أن ت$_1$= $\bar{\text{س}}$ وت$_2$= $\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}} - \text{س})$

هكذا، فمقدر المعقولية العظمى لدالة $\tau(\theta)$ يمكن أن يكون متحيزاً، أي ليس بالضرورة أن يكون مقدر المعقولية العظمى غير متحيز.

مثال (٥):

بفرض س=(س$_1$،....س$_{\text{ن}}$) عينة عشوائية من التوزيع المنتظم ح(٠، θ) فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ.

بما أن: $\text{ق}(\text{س}،\theta) = \frac{1}{\theta}$ ؛ $0 < \text{س} \le \theta$

فيمكن كتابتها على النحو الآتي:

$\text{ق}(\text{س};\theta) = \frac{1}{\theta}$ ؛ $\theta \le \text{س}_{(\text{ن})}$ ؛ $\text{س}_{(\text{ن})}$ = أقصى قيمة $\text{س}_{\text{ي}}$

وبالتالي فدالة المعقولية:

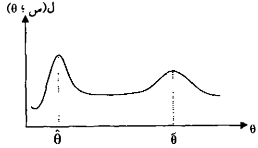
$$ل(س ؛ \theta) = \frac{1}{\theta^{ن}} \quad ؛ \quad \theta \geq س_{(ن)}$$

ويعني هذا أن دالة المعقولية ل متناقصة تماماً في θ. وبما أن θ لا يمكن أن تكون أصغر من $س_{(ن)}$، فإن ل(س ؛ θ) تبلغ نهايتها العظمى عندما $\theta = س_{(ن)}$. وبالتالي فمقدر المعقولية العظمى لـ θ هو $\hat{\theta}$(س) = $س_{ن}$ ونلاحظ أن دالة المعقولية ل(س ؛ θ) غير مستمرة عند النقطة $\theta = س_{(ن)}$ ، ومن ثم مشتقها عند هذه النقطة غير موجود، أي أن التقدير للمعقولية العظمى لا يعتبر حلاً للمعادلة المعقولية:

$$\frac{د \ لو_{هـ} ل(س ؛ \theta)}{د\theta} = ٠$$

وهذه صفة مميزة للحالات التي لا يكون فيها فضاء العينة ك يعتمد على معلمة لذا في مثل هذه الحالات يجب الحيطة وإتباع طرق أخرى (غير حل معادلة أو معادلات المعقولية) للحصول على مقدر المعقولية العظمى، وسنتطرق لبعض هذه الطرق لاحقاً.

ولإيضاح تلك الميزة بيانياً، نفترض أن دالة المعقولية ل(س ؛ θ) يمكن تمثيلها بيانياً كما هو مبنية على الشكل (١)، حيث تعطي طريقة الاشتقاق النقطة θ' بينما التقدير المطلوب (التقدير الذي يجعل دالة المعقولية ل(س ؛ θ) تبلغ نهاية عظمى عنده هو $\hat{\theta}$.



شكل (١)

مثال (٦):

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ح$(\alpha، \beta)$ فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ$(\alpha، \beta)$.

بما أن: $ق(س؛\theta) = \begin{cases} ١/(\beta-\alpha) & : \alpha < س < \beta \\ ٠ & : س \le \alpha \text{ أو } س \ge \beta \end{cases}$

فإن:

$ل(س ؛ \theta) = ١/ (\beta-\alpha)^{ن} ؛ \alpha < س_{ي} < \beta$، ي = ١، .....، ن.

وباشتقاق ل جزائياً بالنسبة لكل من $\alpha، \beta$ والمساواة بالصفر نحصل على معادلتين، وبحلهما نجد أحد المعلمتين $\alpha، \beta$ على الأقل غير محدود، وهذه النتيجة (الحل) غير مقبولة (غير منطقة)، أي تحقق طريقة الاشتقاق في إعطاء التقدير المطلوب. لكن نلاحظ بوضوح من صيغة دالة المعقولية ل(س ؛ θ) أنها تبلغ أكبر قيمة لها عندما يكون الفرق $(\beta-\alpha)$ أصغر ما يمكن، وهذا يتحقق عندما

$\alpha-\beta$ = $س_{(ن)} - س_{(1)}$ ؛ وبالتالي مقدر المعقولية العظمى: $\hat{\theta}$(س) = ($س_{(1)}$، $س_{(2)}$)

مثال (٧):

إذا كانت س=(س١،.....سن) عينة عشوائية من توزيع:

$$ق(س ؛ \alpha، \beta) = \frac{1}{2\beta} \quad ؛ \quad \alpha-\beta \leq س \leq \alpha+\beta$$

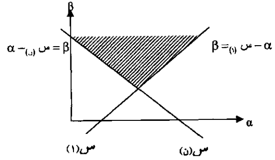
فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة $\theta = (\alpha، \beta)$

بما أن:

$$ل(س ؛ \theta) = \frac{1}{(2\beta)^{ن}} ؛ \alpha-\beta \leq س_{ي} \leq \alpha+\beta ؛ ي = 1، ....، ن$$

أي أن: $ل(س ؛ \theta) = \frac{1}{(2\beta)^{ن}} ؛ \alpha-\beta \leq س_{(1)} \leq س_{(ن)} \leq \alpha+\beta ، ي=1، ...، ن$

ولايجاد مقدر المعقولية العظمى نستخدم الطريقة البيانية، كما هي مبنية على الشكل (٢).



شكل (٢)

نلاحظ أن دالة المعقولية ل(س ؛ θ) تساوي $(1/2\beta)^{ن}$ في المنطقة المظللة على الشكل (٢)، وأن أكبر قيمة ممكنة لها عندما تكون β أصغر ما يمكن، وتكون β أصغر ما يمكن، عند تقاطع الخطين:

$$\beta = \alpha - س_{(1)} \quad ، \quad \beta = س_{(ن)} - \alpha$$

وبالتالي بحلهما المشترك نجد:

$$\hat{\alpha} = \frac{س_{(1)} + س_{(ن)}}{2} \quad ، \quad \hat{\beta} = \frac{س_{(ن)} - س_{(1)}}{2}$$

ومن ثم فإن مقدر المعقولية العظمى لـ θ = (α، β) هو:

$$\hat{\theta}(س) = (\hat{\alpha}، \hat{\beta})؛ \quad \hat{\alpha}(س) = \frac{س_{(1)} + س_{(ن)}}{2} ، \quad \hat{\beta}(س) = \frac{س_{(ن)} - س_{(1)}}{2}$$

مثال (٨):

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية من التوزيع L(ζ) ∍ح(θ،θ+١) فأوجد مقدر المعقولية العظمى للمعلمة بما أن: ق(س؛θ)=١، θ ≤ س ≤ θ+١ فإن دالة المعقولية ل (س؛θ) يمكن كتابتها بدلالة دالة خوفسير على الصورة

$$ل(س؛\theta) = هـ(\theta + 1 - س_{(ن)})\, هـ(س_{(1)} - \theta)$$

ونلاحظ بوضوح من هذه الصغية أن ل(س ؛ θ) تأخذ أكبر قيمة ممكنة لها عندما تكون:

$$\begin{cases} \theta + 1 \geq س_{(ن)} \\ \theta \leq س_{(1)} \end{cases} \Rightarrow س_{(ن)} - 1 \leq \theta \leq س_{(1)}$$

وعلى ذلك فإن تقدير المعقولية العظمى ليس وحيداً، حيث أن أية قيمة: $\hat{\theta}(\text{س}) \in [\text{س}_{(\text{ن})} - 1 ; \text{س}_{(1)}]$ هي تقدير المعلقولية العظمى. فمثلاً، كمقدر معقولية عظمى يمكن أخذ: $\hat{\theta}(\text{س}) = \frac{\text{س}_{(1)} + \text{س}_{(\text{ن})} - 1}{2}$

وفي هذه الحالة $\hat{\theta}(\text{س})$ دالة في الإحصاء الكافي ت=($\text{س}_{(1)}$،$\text{س}_{(2)}$). ونخلص من هذا المثال إلى أن مقدر المعقولية العظمى لمعلمة θ ليس بالضرورة وحيداً.

مثال (٩):

نموذج طبيعي متعدد الأبعاد، تقدير المعقولية العظمى لمعالمة.

لنفرض أن المتغير العشوائي الملاحظ ζ متعدد الأبعاد (ك بعد مثلاً) يخضع للتوزيع الطبيعي ن(μ،Σ)، حيث أن μ=(μ_1،....$\mu_{\text{ك}}$) متجهة القيم المتوسطة، $\Sigma = \|\text{س}_{\text{ير}}\|_1^{\text{ك}}$ ($|\Sigma| \neq 0$) مصفوفة العزوم المركزية من المرتبة الثانية، إن عدد المعالم عند المعلومة (آخذين بالاعتبار تناظر المصفوفةΣ) يساوي ك + ك (ك+١)/ ٢.

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع L(ζ)، فالمطلوب إيجاد تقديرات المعقولية العظمى لمعالم هذا التوزيع:

بما أن سي، ي = ١،......، ن متغيرات عشوائية مستقلة وكل منها ذات ك بعد، بكثافة: θ (μ،Σ)؛

$$\text{ق}(\text{س}_{\text{ي}} ; \theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{\text{ك}} |\Sigma|}} \qquad \text{تقريب}\left[-\frac{1}{2}(\text{س}_{\text{ي}} - \mu)^{\text{ز}} \Sigma^{-1} (\text{س}_{\text{ي}} - \mu)\right]$$

فإن:

$$\prod_{\text{ي}=1}^{\text{ن}} \text{ق}(\text{س}_{\text{ي}};\theta) = (2\pi)^{-\frac{\text{نك}}{2}}\,|\Sigma|^{-\frac{\text{ن}}{2}}\ \text{تقريب}\left[-\frac{1}{2}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)'\,\Sigma^{-1}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)\right]\ldots\ldots(5)$$

لنرمز بـ $\overline{\text{س}}=(\text{س}_1،\ldots\text{س}_{\text{ن}})/\text{ن}$، عندها: $\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)'\,\Sigma^{-1}(\text{س}_{\text{ي}}-\mu)$

$$= \sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\overline{\text{س}})\,\Sigma^{-1}(\text{س}_{\text{ي}}-\overline{\text{س}}) + \text{ن}(\overline{\text{س}}-\mu)'\,\Sigma^{-1}(\overline{\text{س}}-\mu)$$

إذا رمزنا بـ $\hat{\Sigma}(\text{س})$ لمصفوفة العزوم من المرتبة الثانية للعينة، فإن:

$$\hat{\Sigma}(\text{س}) = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\overline{\text{س}})\,(\text{س}_{\text{ي}}-\overline{\text{س}})' = \|\text{س}_{\text{ير}}\|_1^{\text{ك}}$$

حيث أن $\hat{\text{ي}}_{\text{ير}}$ العزم المركزي من المرتبة الثانية للعنية ويحسب من العلاقة:

$$\hat{\text{ي}}_{\text{ير}} = \frac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ل}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{لي}}-\overline{\text{س}}_{\text{ي}})\,(\text{س}_{\text{لي}}-\overline{\text{س}}_{\text{ر}})\text{؛ ي، ر} = 1،\ldots\ldots\text{،ك}$$

هنا $\text{س}_1=(\text{س}_{\text{ل}1}،\ldots\text{س}_{\text{لك}})$؛ $\text{ل}=1،\ldots،\text{ن}$ و

$$\overline{\text{س}}_{\text{ي}} = \frac{1}{\text{ن}}(\text{س}_{1\text{ي}}+\ldots\ldots+\text{س}_{\text{ني}})\,\overline{\text{س}}=(\overline{\text{س}}_1،\ldots\ldots،\overline{\text{س}}_{\text{ك}})$$

وباستخدام المساواة $\text{ص}^{\text{ذ}}\,\text{ب ص} = \text{زر}\,(\text{ب ص}^*)$، $\text{ص}^* = \text{ص}^{\text{ذ}}\text{ص}$ والمؤثر الخطي زر نجد:

$$\sum_{\text{ل}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ر}}-\overline{\text{س}})'\,\Sigma^{-1}(\text{س}_{\text{ر}}-\overline{\text{س}}) = \text{ن}\,\text{رز}(\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(\text{س}))$$

وبناءً على المساواتين (٦) و(٧) يمكن كتابة دالة المعقولية ل(س ؛ θ) على الصورة

$$\text{ل}(\text{س};\theta) = (2\pi)^{-\frac{\pi\text{ك}}{2}}$$

$$\text{تقريب}\left[-\frac{ن}{2}(\bar{س}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{س}-\mu)-\frac{ن}{2}\text{زر}\,\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(س)-\frac{ن}{2}\text{لو}_{ه}|\Sigma|\right]$$

نلاحظ أن أكبر قيمة ممكنة لدالة المعقولية ل بالنسبة لـθ توافق أصغر قيمة ممكنة للدالة:

$$\psi(س،\mu،\Sigma)=(\bar{س}-\mu)'\Sigma^{-1}(\bar{س}-\mu)+\left[\text{زر}\,\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(س)-ك-\text{لو}_{ه}\,\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(س)\right]$$

بالنسبة لـ Σ، μ. (إدخال الثابتين ك و $\text{لو}_{ه}|\hat{\Sigma}|$ من أجل تبسيط الصياغات اللاحقة).

إذا رمزنا بـ λ_1،......،$\lambda_{ك}$ لجذور المعادلة المميزة:

$$\left|\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(س)-\lambda و_{ك}\right|=0 \quad \text{أو} \quad \left|\hat{\Sigma}(س)-\lambda\Sigma\right|=0$$

فإن:

$$\text{زر}\,\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(س)-ك-\text{لو}_{ه}|\Sigma^{-1}\hat{\Sigma}(س)|=\lambda_1+\dots+\lambda_{ك}-ك-\text{لو}_{ه}(\lambda_1+\dots+\lambda_{ك})$$

بما أن Σ^{-1} مصفوفة محددة وموجبة و $م \geq 0$ ؛ $م - 1\ \text{لو}_{ه}\ م \geq 0$، فإن:

$$\psi(س؛\mu،\Sigma)\geq 0$$

وتتحقق المساواة فقط عندما $\mu=\bar{س}$ و $\lambda_1=\lambda_2=\dots\dots=\lambda_{ك}=1$ أي عندما $\mu=\bar{س}$ و $\Sigma=\hat{\Sigma}(س)$، وبالتالي فإن مقدري المعقولية العظمى لـ μ و $\Sigma=\|\delta_{ير}\|_{1}^{ك}$ هما على الترتيب $\bar{س}$ و $\hat{\Sigma}(س)=\|\delta_{ير}\|_{1}^{ك}$.

يتمتع مقدر المعقولية العظمى لمعلمة θ، ببعض الخواص الهامة، والتي سنذكرها بصيغة مبرهنات.

مبرهنة (١):

لتكن س=(س١،....س ن) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ق(س ؛ θ) يعتمد على معلمة θ (وحيدة البعد أو متعدد الأبعاد) و $\hat{\theta}$(س) تقدير المعقولية العظمى لـθ.

إذا كانت خ = خ(θ) دالة تناظر أحادية في θ معرفة على θ وتأخذ قيمها خ = {خ = (خ١،....،خ ر) ⊂ ح ر} ، فإن تقدير المعقولية العظمى لـ خ = خ(θ) هو $\hat{خ}$ = خ($\hat{\theta}$).

الإثبات:

بما أن خ = خ(θ) دالة تناظر أحادية في θ (حسب الفرض)، فإن الدالة العكسية موجودة وهي θ = θ (خ) عندها:

قيمة قصوى ل(س ؛ θ) (θ∈$\hat{\theta}$)   قيمة قصوى ل(س ؛ θ(خ)) (ح∈خ)

وإذا كانت الدالة ل(س ؛ θ) تبلغ أكبر قيمة ممكنة لها عند النقطة $\hat{\theta}$ = $\hat{\theta}$(س)، فإن الدالة. ل(س ؛ θ(خ)) في خ تبلغ أكبر قيمة لها عند النقطة $\hat{خ}$، المحققة للمعادلة $\hat{\theta}$(خ) = $\hat{\theta}$ أي عند النقطة $\hat{خ}$ = خ($\hat{\theta}$).

تدعى هذه الخاصة لمقدِّر المعقولية العظمى بخاصة الثبات أو عدم الاختلاف.. وتعطي هذه الخاصة امكانية الحصول على مقدرات المعقولية العظمى لأسرة هامة من الدوال المعلمية τ(θ) ذات التناظر الأحادي في θ. وهذا ما سنوضحه من خلال الأمثلة الآتية.

مثال (١٠):

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية من مجتمع كثافة توزيعه الاحتمالي:

$$ق(س ؛ \theta) = \theta^{س} (١-\theta)^{١-س} ؛ س = ٠ ، ١$$

فأوجد مقدر المعقولية العظمى للدالة $\tau(\theta) = \frac{\theta ٢}{\theta + ١}$

نبحث أولاً عن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ:

$$ل(س ؛ \theta) = \theta^{ن\bar{س}} (١-\theta)^{ن(١-\bar{س})}$$

$$لو_{هـ} ل(س ؛ \theta) = ن\bar{س} \, لو_{هـ}\theta + (١-\bar{س}) \, لو_{هـ} (١-\theta)$$

$$\frac{د \; لو_{هـ} ل}{د\theta} = \frac{ن\bar{س}}{\theta} - \frac{ن(١-\bar{س})}{١-\theta} = ٠$$

ومنها $\hat{\theta}(س) = \bar{س}$

بما أن $\tau(\theta) = \frac{\theta ٢}{\theta + ١}$ **دالة تناظر أحادية في θ، وبما سبق ستجد أن مقدر المعقولية العظمى ل** $\tau(\theta)$ **هو:** $\hat{ك} = \tau(\theta) = \frac{٢\bar{س}}{١+\bar{س}}$

مثال (١١):

إذا كانت لدينا معطيات المثال (١)، فأوجد المعقولية العظمى لكل من الدوال المعلمية الآتية:

$$\tau_{١}(\theta) = \frac{١}{\theta} ، \tau_{٢}(\theta) = لو_{هـ}\theta + ١ ، \tau_{٣}(\theta) = \frac{لو_{هـ}\theta}{\theta}$$

بما أن مقدر المعقولية للمعلمة θ هو $\hat{\theta}(\text{س}) = \frac{1}{\bar{\text{س}}}$ وكل من الدوال المعلمية $\tau_1، \tau_2، \tau_3$ ذات تناظر أحادي في θ، فحسب المبرهنة (١) نجد:

$$\hat{\text{ك}}_1 = \tau_1(\hat{\theta}) = \bar{\text{س}}،\quad \hat{\text{ك}}_2 = \tau_2(\hat{\theta}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{\bar{\text{س}}} + 1 \quad \hat{\text{ك}}_3 = \tau_3(\hat{\theta}) = \bar{\text{س}}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \frac{1}{\bar{\text{س}}}$$

مبرهنة (٢):

إذا كانت س=(س١،....سن) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ق(س ؛ θ). وكان هناك إحصاء كافي للمعلمة θ، فن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ يكون دالة في هذا الإحصاء الكافي.

الإثبات:

أن ت = ت(س) إحصاء كافي للمعلمة θ، ومن ثم يمكن كتابة دالة المعقولية على الصورة:

$$\text{ل}(\text{س} ؛ \theta) = \text{ك}(\text{ت}؛ \theta)\ \text{هـ}(\text{س})$$

وعلى ذلك:

$$\text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س} ؛ \theta) = \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ك}(\text{ت}؛ \theta) + \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{هـ}(\text{س})$$

$$\frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ل}(\text{س}؛\theta)}{\text{د}\theta} = \frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\ \text{ك}(\text{ت}؛\theta)}{\text{د}\theta} = \text{ج}\ (\text{ت}؛ \theta)$$

لإيجاد مقدر المعقولية العظى نضع: $\text{ج}\ (\text{ت}؛ \theta) = 0$

وبحل هذه المعادلة بالنسبة لـ θ نجد:

$\hat{\theta}(\text{س}) = \varphi\ (\text{ت})$.

مبرهنة (٣):

إذا وجد المقدّر الأمثل للمعلمة θ في توزيع ق(س ؛ θ)، فإنه مقدر المعقولية العظمى لهذه المعلمة.

الإثبات:

لكن س=(س$_1$،....س$_{ن}$) عينة عشوائية من مجتمع توزيعه ق(س ؛ θ) ولنفرض أن ت*= ت*(س) المقدر الأمثل لتقدير المعلمة θ.

بما أن ت* المقدر الأمثل للمعلمة θ، فإن:

$$\text{و}_{\theta}\,\text{ت}^{*} = \theta \quad ، \qquad \text{ف}_{\theta}\,\text{ت}^{*} = \frac{1}{\text{ن}_{\text{ي}}(\theta)}$$

وبالتالي حسب علاقات سابقة نجد:

$$\text{ع}(\text{س};\theta) = \frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ل}(\text{س};\theta)}{\text{د}\theta} = \frac{1}{\text{ن}_{\text{ي}}(\theta)}(\text{ت}^{*} - \theta)$$

بوضع: $\frac{1}{\text{ن}_{\text{ي}}(\theta)}(\text{ت}^{*} - \theta) = 0$ وبحلها بالنسبة لـ نجد أن: $\hat{\theta}(\text{س}) = \text{ت}^{*}$.

مثال (١٢):

إذا كانت س=(س$_1$،....س$_{ن}$) عينة عشوائية من التوزيع $L(\zeta) \ni$ ن(θ_1, θ_2^2) فأوجد مقدر المعقولية العظمى للدالة:

$$\tau(\theta) = \phi\left(\frac{\text{س}_{0} - \theta_1}{\theta_2}\right) ؛ \theta = (\theta_1, \theta_2)$$

الممثلة للاحتمال $\text{ح}_{\theta}(\zeta < \text{س}_{0})$.

يمكن في هذه الحالة وضع $\hat{\text{خ}} = (\tau(\hat{\theta}), \hat{\theta}_{٢})$، وهي دالة تناظر أحادية في $\theta = (\theta_{١}, \theta_{٢})$ وبالتالي حسب المبرهنة (١) فتقدير المعقوليه العظمى لـ خ θ يكون: $\hat{\text{خ}} = (\tau(\hat{\theta}), \hat{\theta}_{٢})$ لكن كما نعلم المعقولية العظمى لكل $\theta_{١}, \theta_{٢}$ من هو $\bar{\text{س}}$، م على الترتيب، إذن:

$$\hat{\text{خ}} = (\phi(\frac{\text{س}_{٠} - \bar{\text{س}}}{\text{م}}), \text{م})$$

أي أن تقدير المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta)$ هو: $\hat{\tau} = \tau(\hat{\theta}) = \phi(\frac{\text{س}_{٠} - \bar{\text{س}}}{\text{م}})$

ومن ثم فمقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta)$:

$$\hat{\tau}(\text{س}) = \phi(\frac{\text{س}_{٠} - \bar{\text{س}}}{\text{م}})$$

مثال (١٣):

إذا كانت س=(س١،.....سن) عينة عشوائية من التوزيع الطبيعي ثنائي العبد ن(٠، Σ)، حيث أن:

$$\begin{Vmatrix} \sigma^{٢} & \rho\sigma^{٢} \\ \rho\delta^{٢} & \delta^{٢} \end{Vmatrix} \text{،} \quad (٠،٠) = ٠$$

و $\delta^{٢} > ٠$ ، $|\rho| < ١$ مجهولين:

إن $L(\text{س}_{\text{ي}}) \ni \text{ن}(٠،\Sigma)$ ؛ ي = ١،.....،ن أي متغير عشوائي ذو بعدين كثافة توزيعه الاحتمالية:

$$ت(س\,؛\,ص\,؛\theta) = \frac{1}{2\pi}\ \text{تقريب}\left\{\frac{-س^{2}+ص^{2}}{2\delta^{2}(1-م^{2})} + \frac{م(س+ص)}{\delta^{2}(1-م^{2})} - \frac{1}{2}\ \text{لوهـ}[\delta^{2}(1-م^{2})]\right\}$$

$$؛\ \theta = (\sigma^{2}،م)$$

تلاحظ هنا أن صيغة دالة المعقولية معقدة وهي تعتمد على معلمتين P، δ^2 وبالتالي لتبسيط عملية إيجاد تقديري المعقولية العظمى $\hat{\rho}$،$\hat{\delta}^2$ من المفيد الانتقال إلى معلمة جديدة خ = (خ$_1$، خ$_2$) بدلاً من θ = (δ^2،P)، بوضع:

$$خ_1 = خ_1(\theta) = -\frac{1}{2\delta^{2}(1-\rho^{2})} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$خ_2 = خ_2(\theta) = \frac{\rho}{\delta^{2}(1-\rho^{2})}$$

وعندئذ يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية على الصورة: ق(س، ص؛ θ)=

$$ق(س،ص؛\theta) = \frac{1}{2\pi}\ \text{تقريب}\ [خ_1(س^{2}+ص^{2}) + خ_2 س\,ص + \tau(خ)]$$

حيث أن: $\tau(خ) = (1/2)\ \text{لوهـ}\ (4خ_1^{2} - خ_2^{2})$

وعلى ذلك يمكن بسهولة إيجاد معادلتي المعقولية لتقدير خ$_1$! خ$_2$ وهما:

$$\frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن}(س_ي^{2}+ص_ي^{2}) = -\frac{د\tau(خ)}{د\,خ_1} = -\frac{4خ_1}{4خ_1^{2}-خ_2^{2}}$$

$$\frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي\,ص_ي = \frac{-د\tau(خ)}{خد_2} = -\frac{خ_2}{4خ_1^{2}-خ_2^{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

لكن من العلاقتين في (1) نجد:

$$\rho = \frac{-خ_2}{2خ_1} \qquad ، \qquad \delta^{2} = \frac{2خ_1}{4خ_1^{2}-خ_2^{2}}$$

وبالتالي من العلاقتين في (٢) نحصل على تقدير المعقولية العظمى:

$$\hat{\delta}^{2} = \frac{1}{2ن} \sum_{ي=1}^{ن} (س_{ي}^{2} + ص_{ي}^{2}) \quad , \quad \hat{\rho} = 2 \sum_{ي=1}^{ن} س_{ي} ص_{ي} \Big/ \sum_{ي=1}^{ن} (س_{ي}^{2} + ص_{ي}^{2})$$

حيث أن $(س_{ي} ، ص_{ي})$ القيمة الملاحظة لـ $س_{ي}$ ؛ ي = ١،.....، ن

*** طريقة التراكم لحساب تقدير المعقولية العظمى بالتقريب:**

لا يتاح دائماً الحصول على تقديرات المعقولية العظمى بصورة صريحة محددة. في مثل تلك الحالات نلجأ إلى طريقة التقريب العددية لحل معادلة أو معادلات المعقولية (عندما يمكن صياغة مثل تلك المعادلات). أي الحصول على تقدير المعقولية العظمى بالتقريب وإحدى طرق التقريب هذه تدعى بطريقة التراكم، التي قدمت من قبل العالم فيشر، وتتمثل بما يلي:

لتكن θ معلمة حقيقية ودالة المعقولية ل(س؛ θ) قابلة للاشتقاق مرتين بالنسبة لـ θ. ننشر حالة المساهمة ع(θ) = ع (س ؛ θ) وفق متسلسلة تيلور في جوار النقطة θ_0 المتخذة كتقريب ابتدائي لـ $\hat{\theta} = \hat{\theta}$(س) ونحسب هذا المنشور عند $\theta = \hat{\theta}$ عندئذ، بما أن ع($\hat{\theta}$) = ٠ فإن:

ع(θ_0) + ($\hat{\theta} - \theta_0$) عَ(θ^*) حيث θ^* نقطة ما بين $\hat{\theta}$ ، θ_0. وبالتالي:

$$\hat{\theta} = \theta_0 - \left(\frac{ع(\theta_0)}{عَ(\theta^*)} \right)$$

إذا استبدلنا الآن في هذه المساواة θ^* بـ θ_0. وعَ(θ_0) بـ -ن ي (θ_0)= وعَ(س؛θ_0) نحصل على التقريب الأول:

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{ع(\theta_0)}{ن ي(\theta_0)}$$

يمكن تكرار هذه العملية، بأخذ θ_1 كتقريب ابتدائي جديد، وهكذا فالتقريب (ك +١) وفق طريقة التراكم يحسب وفق العلاقة:

$$\theta_{ك+1} = \theta_{ك} + \frac{ع(\theta_{ك})}{ن\ ي(\theta_{ك})} \quad ،\ ك = ٠، ١، ٢،.....$$

تستمر عملية التكرار حتى بلوغ الدقة المطلوبة: $|\theta_{ك+1} - \theta_{ك}| < \varepsilon$ .....(١٢)

إن اختيار النقطة الأولية θ_0 يعتبر هاماً. وعادةً يتم أخذ قيمة ما بحيث تسهل حساب تقدير مستق للمعلمة θ، عندها النقاط الثلاث θ_0، θ^*، $\hat{\theta}$، في حالة عينة كبيرة الحجم ن، تقع قريبة من القيمة الحقيقية للمعلمة المجهولة. وفي حالات عدة يمكن استخدام تقديرات طريقة العزوم، التي سنتطرق لها لاحقاً، كنقطة أولية θ_0.

تجدر الإشارة إلى أن طريقة التراكم بشكل عام تؤدي إلى الهدف وبشكل سريع، مع أنها في بعض الحالات لا تنتهي.

مثال (١٤):

(نموذج كوشي تقدير المعلمة بطريقة التراكم).

لتكن س = ($س_1$، .....، $س_ن$) عينة من توزيع كوشي ك(θ)، إن دالة المساهمة:

$$ع(\theta) = ٢\sum_{ي=1}^{ن} \frac{(س_ي - \theta)}{1 + (س_ي - \theta)^2}$$

إن الحصول على حل دقيق لمعادلة المعقولية ع(θ) = ٠ غير ممكن. وبما أن دالة المعلومات من أجل نموذج كوشي تساوي ١/ ٢، فالمتتالية (١٢) تأخذ الشكل.

$\theta_{ك+1} = \theta_{ك} + (٢/ن)ع(\theta_{ك})$ ، ك = ٠، ١، ٢،......

وكتقريب ابتدائي يمكن أخذ θ. تساوي وسيط العينة $\bar{س}$، الذي يتقارب بالاحتمال، عندما ن ⟵ ∞ من القيمة الحقيقية للمعلمة θ، التي تعتبر في الحالة المفروضة الوسيط النظري (وسيط المجتمع $\bar{\mu}$).

*** الخواص التقاربية لمقدر المعقولية العظمى:**

إن طريقة المعقولية العظمى لا تعطي دوماً مقدر غير متحيز. فمثلاً، نجد في المثال (٤)، ان التباين للعينة $م^{٢}$(س) هو مقدر المعقولية العظمى للتباين $\theta_{٢}$؛ في النموذج ن($\theta_{١}$،$\theta_{٢}$)، وهذا المقدر متحيز. إلا أن مقدار التحيز و$_{\theta}$ $م^{٢} - \theta_{٢} = -\theta_{٢}$/ ن يتناقص بازدياد حجم العينة، وينتهي إلى الصفر عندما ن ⟵ ∞ أي أن مقدّر المعقولية العظمى يصبح غير متحيز. تدعى المقدرات المتحيزة التي تتمتع بمثل هذه الخاصة بغير المتحيزة تقاربياً أو غير المتحيزة بالتقارب.

إن خاصة تلك المقدرات المرتبطة بعدم التحيز تتحسن بازدياد حجم العينة. وهذه الحالة لها طبيعة عامة إلى حد ما. وبشكل خاص إن أهم خاصة لمقدرات المعقولية العظمى تتمثل في أنها لها طبيعة تقاربية، أي صحيحة من أجل عينات كبيرة. لذا فإن الاستخدام الواسع لمقدرات المعقولية العظمى مرتبط أساساً بخواصها التقاربية. إن عرض مبرهنات التقارب لمقدرات المعقولية العظمى تشكل محتوى هذه الفقرة، وللإشارة إلى ارتباط المقدرات حجم العينة سنشير إليها بالدليل ن.

عند التكلم عن الخواص التقاربية للمقدرات (أو الخواص من أجل عينات كبيرة)، فقبل كل شيء نهتم باتساقها وبعبارة أخرى، وبالتقارب

بالاحتمال للمقدرات المفروضة من المميزات النظرية المرافقة لها، لأنه كما بينا في الفصل الثالث، أن غالبية مميزات العينة (عزوم العينة، القيم الحرجة، قيمة دالة التوزيع التجريبي في كل نقطة، ....الخ) تتقارب بالإحتمال من المميزات النظرية الموافقة لها، عندما ن $\longrightarrow \infty$، وبالتالي تعتبر مقدرات متسقة لنقدم الآن التعريف الدقيق للاتساق.

لتكن س = (س$_1$، ....، س$_ن$) عينة عشوائية من التوزيع $L(\zeta) \ni$ ق{ق(س؛θ)؛$\theta \ni \Theta$} حيث في الحالة العامة فضاء المعلمة Θ مجال مفتوح من الفضاء ح^ر.

يدعى، حسب التعريف، المقدر ت$_ن$ = ت$_ن$ (س) من أجل $\tau(\theta)$ بالمتسق، إذا حقق الشرط التالي:

$$ت_ن \xrightarrow{ح_\theta} \tau(\theta) \quad ; \quad \forall\theta \ni \Theta$$

أي أنه مهما تكن القيمة الحقيقية للمعلمة θ من فضاء المعلمة Θ، فإن ت$_ن$ يتقارب احتمالياً (بالنسبة للتوزيع ح$_\theta$) من القيمة الحقيقية للدالة المقدرة $\tau(\theta)$.

إن خاصة الاتساق ضرورة من أجل أي قاعدة تقدير، إلا أنها في حقيقة الأمر، تعتبر خاصة تقاربية ومستقلة عن خواص المقدر عند ثبات حجم العينة (خلافاً لخاصتي عدم التحيز والكفاءة) لنرى الآن المعيار الهام والبسيط للاتساق.

مبرهنة (٤):

إذا كان و$_\theta$ ت$_ن$= $\tau(\theta)$ + $\varepsilon_ن$،   ف$_\theta$ ت$_ن$ = $\delta_ن$

و

$$\varepsilon_{ن} = \varepsilon_{ن}(\theta) \longrightarrow 0 \text{ ، } \delta_{ن}(\theta) \longrightarrow 0 \text{ ؛ } \forall\, \theta \in \theta$$

عندما ن $\longrightarrow \infty$ ، فإن تن مقدر متسق للدالة $\tau(\theta)$

الإثبات:

بما أن:

$$|ت_{ن} - و_{\theta}ت_{ن}| = |(ت_{ن} - \tau) - (و_{\theta}ت_{ن} - \tau)| \le |ت_{ن} - \tau| - |و_{\theta}ت_{ن} - \tau|$$

والحادث $\{|ت_{ن} - \tau| \le ع\}$ **محتوى في الحادث** $\{|ت_{ن} - و_{\theta}ت_{ن}| \le ع - |ع_{ن}|\}$ **فحسب متباينة تشيبيشف نجد:**

$$ح_{\theta}(|ت_{ن} - \tau| \le ع) \ge ح_{\theta}(|ت_{ن} - و_{\theta}ت_{ن}| \le ع - |ع_{ن}|) \ge \frac{\delta_{ن}}{(ع - |ع_{ن}|)^{2}}$$

وعندما ن $\longrightarrow \infty$ **مهما تكن** $\theta \in \theta$.

نورد فيما يلي بعض الخواص لتقارب دوال في متغيرات عشوائية، المفيدة لاحقاً.

1. إذا كان $\eta_{ن} \xrightarrow{ح} \eta$ و φ دالة مستمرة، فإن: $\varphi(\eta_{ن}) \xrightarrow{ح} \varphi(\eta)$ وأيضاً $L(\varphi(\eta_{ن})) \longrightarrow L(\varphi(\eta))$

2. لتكن ن = ١، ٢،....، $\{\eta_{ن}، \zeta_{ن}\}$ متتالية أزواج من المتغيرات العشوائية، عندئذٍ:

   1. $\eta_{ن} - \zeta_{ن} \xrightarrow{ح} 0$ ، $\zeta_{ن} \xrightarrow{ح} \zeta \Longrightarrow \eta_{ن} \xrightarrow{ح} \zeta$

٢. $\eta_{ن} - \zeta_{ن} \xrightarrow{ح} ٠$ ، $L(\zeta_{ن}) \longrightarrow L(\zeta) \Longrightarrow L(\eta_{ن}) \longrightarrow L(\zeta)$

٣. $L(\eta_{ن}) \Rightarrow L(\eta)$ ، $\zeta_{ن} \xrightarrow{ح} ٠ \Longrightarrow \eta_{ن}\zeta_{ن} \xrightarrow{ح} ٠$

٤. $L(\eta_{ن}) \Rightarrow L(\eta)$ ، $\zeta_{ن} \xrightarrow{ح} جـ \Longrightarrow L(\eta_{ن} + \zeta_{ن}) \longrightarrow L(\eta + جـ)$

$L(\eta_{ن} + \zeta_{ن}) \longrightarrow L(\eta جـ)$ ، $L(\eta_{ن} / \zeta_{ن}) \longrightarrow L(\eta / جـ)$ ؛ $جـ \neq ٠$

٥. $\eta_{ن} + \zeta_{ن} \xrightarrow{ح} ٠$ ، $L(\zeta_{ن}) \longrightarrow L(\zeta) \Rightarrow \varphi(\eta_{ن}) - \varphi(\zeta_{ن}) \xrightarrow{ح} ٠$

حيث φ دالة مستمرة، نترك برهان هذه الخصائص البسيطة للقارئ على سبيل المثال.

٣. إذا كانت س = (س١، ....، سن) و تن = تن(س) مقدر المعلمة وحيدة البعد θ في النموذج $\theta \in \Theta$ ؛ ق(س؛ θ)، بحيث أن:

$$L_{\theta}\left(\sqrt{ن}(ت_{ن} - \theta)\right) \longrightarrow ن(٠، \delta^{٢}(\theta)) \quad ; \quad \forall \theta \in \Theta$$

عندما ن $\longrightarrow \infty$ ، وإذا كانت الدالة φ قابلة للاشتقاق و $\acute{\varphi} \neq ٠$، فإن:

$$L_{\theta}\left(\sqrt{ن}(\varphi(ت_{ن}) - \varphi(\theta))\right) \longrightarrow ن\{٠، [\acute{\varphi}(\theta)]^{٢}\delta^{٢}(\theta)\} \quad\text{..............(١٣)}$$

بالإضافة لذلك إذا كانت الدالة $\acute{\varphi}$ مستمرة فإن

$$L_{\theta}\left(\sqrt{ن}(\varphi(ت_{ن}) - \varphi(\theta)) \;/\; \acute{\varphi}(ت_{ن})\right) \rightarrow ن\left(٠، \sigma^{٢}(\theta)\right) \quad\text{..................(١٤)}$$

وإذا كان $\delta(\theta)$ مستمراً فإن:

$$L_{\theta}\left(\frac{\sqrt{ن}\,(\varphi(ت_{ن}) - \varphi(\theta))}{\acute{\varphi}(ت_{ن})\delta(ت_{ن})}\right) \longrightarrow ن(٠، ١) \quad\text{............................(١٥)}$$

يعتمد الإثبات على منشور تيلور:

$\varphi(\text{ت}_{\text{ن}}) - \varphi(\theta) = (\text{ت}_{\text{ن}} - \theta)(\varphi'(\theta) + \zeta_{\text{ن}})$ حيث عندما $|\text{ت}_{\text{ن}} - \theta| < \delta = \delta_{(\varepsilon)}$ فإن: $|\zeta_{\text{ن}}| < \varepsilon$ ؛ $\forall \varepsilon > ٠$ من ذلك:

$$\text{ح}_{\theta}(|\zeta_{\text{ن}}| < \varepsilon) \geq \text{ح}_{\theta}(|\text{ت}_{\text{ن}} - \theta| < \delta)$$

لكن الطرف الأيمن حسب الفرض، ينتهي إلى ١ عندما ن $\longrightarrow \infty$ وبالتالي $\zeta_{\text{ن}} \xrightarrow{\text{ح}_{\theta}} ٠$، وبناءً على الخاصة [(٣) من ٢]:

$$\sqrt{\text{ن}}[\varphi(\text{ت}_{\text{ن}}) - \varphi(\theta)] - \sqrt{\text{ن}}[(\text{ت}_{\text{ن}} - \theta) - \varphi'(\theta)] = \sqrt{\text{ن}}(\text{ت}_{\text{ن}} - \theta)\zeta_{\text{ن}} \xrightarrow{\text{ح}_{\theta}} ٠$$

وهذا يعني حسب الخاصة [(٢) من ٢] أن المتغير العشوائي $\sqrt{\text{ن}}(\varphi(\text{ت}_{\text{ن}}) - \varphi(\theta))$ له أيضاً نفس التوزيع المقارب، كما للمتغير العشوائي $\sqrt{\text{ن}}(\text{ت}_{\text{ن}} - \theta)\varphi'(\theta)$ أي التوزيع الطبيعي $\text{ن}(٠، [\varphi'(\theta)]^{٢}\delta^{٢}(\theta))$ وهذا ما تؤكده العلاقة (١٣). وإذا كانت φ' مستمرة، فحسب الخاصة (١):

$$\varphi'(\text{ت}_{\text{ن}}) \xrightarrow{\text{ح}_{\theta}} \varphi'(\theta)$$

ومن ذلك ومما سبق وحسب الخاصة [(٤) من ٢] نحصل على العلاقة (١٤) وبإجراء مناقشة مشابهة يمكن إثبات صحة الصيغة (١٥)، تقدم بدون إثبات تعميماً للخاصة ٣ على حالة معلمة متجه $\theta = (\theta_{١}، \ldots\ldots، \theta_{\text{ر}})$

٤. ليكن ت=(ت$_{١\text{ن}}$، ....، ت$_{\text{رن}}$) مقدّراً للمعلمة θ، المحقق للشرط $L_{\theta}(\sqrt{\text{ن}}(\text{ت}_{\text{ن}} - \mu)) \longrightarrow \text{ن}(٠، \Sigma(\mu))$ عندما ن $\longrightarrow \infty$ ومهما تكن . عندئذ $\theta \in \Theta$.، عندئذ من أجل أي دالة φ في ر متغير وقابلة للاشتقاق:

$$L_{\theta}(\sqrt{\text{ن}}(\text{ت}_{\text{ن}} - \mu)) \longrightarrow \text{ن}(٠، v^{٢}(\theta)) \ldots\ldots\ldots\ldots (١٤)$$

بفرض $v(\theta) \neq 0$، حيث $v^{2}(\theta) = \text{بَ}(\theta)\Sigma(\theta)\text{ب}(\theta)$ وب $= \left(\frac{\text{د}\varphi(\theta)}{\text{د}\theta_{1}}، \ldots\ldots، \frac{\text{د}\varphi(\theta)}{\text{د}\theta_{\text{ر}}}\right)$ بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت الدالة φ مستمرة وقابلة للاشتقاق وكل عناصر مصفوفة العزوم من المرتبة الثانية $\Sigma(\theta)$ مستمرة بالنسبة لـθ فإن:

$$L_{\theta}\left(\sqrt{\text{ن}}\left(\varphi(\text{ت}_{\text{ن}}) - \varphi(\theta)\right)/v(\theta)\right) \longrightarrow \text{ن}\,(0، 1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17)$$

لنصيغ الآن الخواص المقارنة الأساسية لمقدرات العظمى. لنفترض أن النموذج $\text{ق}(\text{س}؛ \theta)$ نظامن، ودالة المعقولية $\text{ل}_{\text{ن}}(\text{س}؛ \theta)$ لها نهاية عظمى واحدة بالنسبة لـ$\theta \in \Theta$ من أجل $\text{ن} \leq 1$ و $\text{س} \in \text{ك}$ أي أن مقدر المعقولية العظمى موجود $\hat{\theta}_{\text{ن}}(\text{س})$ عندئذ:

١. مقدر المعقولية $\hat{\theta}(\text{س})$ للمعلمة θ متسق.

٢. إذا كانت الدالة $\text{ق}(\text{س}؛ \theta)$ قابلة للاشتقاق ثلاث مرات بالنسبة لـθ وتوجد دالة $\text{م}(\text{س})$ مستقلة عن θ، بحيث أن:

$$\left|\frac{\text{د}^{3}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س}؛\theta)}{\text{د}\theta_{\text{ي}}\,\text{د}\theta_{\text{ر}}\,\text{د}\theta_{\text{جـ}}}\right| \leq \text{م}(\text{س})،\ \text{و}_{\theta}\,\text{م}(\text{س}_{1}) < \infty\ ؛\ \text{ي، ر، جـ} = 1، \ldots، \text{ن}$$

فعندما $\text{ن} \longrightarrow \infty$ ومهما تكن $\theta \in \Theta$، فإن:

$$L_{\theta}\left(\sqrt{\text{ن}}\left(\hat{\theta}_{\text{ن}} - \theta\right)\right) \longrightarrow \text{ن}\left(0، \text{ط}^{-1}(\theta)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(18)$$

حيث أن $\text{ط}(\theta)$ مصفوفة المعلومات، المعرفة بالعلاقة (٦)، والتي تعتبر حسب الفرض نظامية، أي غير شاذة ($|\text{ط}(\theta)| \neq 0$) بالإضافة إلى ذلك، إذا

كانت الدالة $\tau(\theta)$ مستمر وقابلة للاشتقاق بالنسبة لـ θ و $\hat{\tau}_{\text{ن}} = \tau(\hat{\theta}_{\text{ن}})$ مقدّر المعقولية العظمى لها، فإن:

$$L_\theta\left(\sqrt{\text{ن}}\,(\hat{\tau}_{\text{ن}} - \tau(\theta))\right) \longrightarrow \text{ن}\left(0,\ \delta^2_{\text{ر}}(\theta)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(19)$$

حيث أن:

$$\delta^2_{\text{ر}}(\theta) = \text{بَ}(\theta)\,\text{ط}^{-1}(\theta)\,\text{ب}(\theta), \qquad \text{ب}(\theta) = \left(\frac{\text{د}\tau(\theta)}{\text{د}\theta_1}, \ldots\ldots, \frac{\text{د}\tau(\theta)}{\text{د}\theta_{\text{ر}}}\right)$$

هكذا، من أجل صف واسع من النماذج فإن مقدرات المعقولية العظمى متسقة وطبيعية بالتقارب في حالة معلمة θ وحيدة البعد تأخذ العلاقتان (١٨)و (١٩) الشكل:

$$L_\theta\left(\sqrt{\text{ن}}\,(\hat{\theta}_{\text{ن}} - \theta)\right) \longrightarrow \text{ن}\left(0,\ 1/\text{ي}(\theta)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(20)$$

$$L_\theta\left(\sqrt{\text{ن}}\,(\hat{\tau}_{\text{ن}} - \tau(\theta))\right) \longrightarrow \text{ن}\left(0,\ [\tau'(\theta)]^2/\text{ي}(\theta)\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

حيث ي(θ) دالة المعلومات المعرفة بالعلاقة (١٣)

إثبات خاصة أن مقدر المعقولية العظمى طبيعي بالتقارب (في حالة معلمة وحيدة البعد) يعتمد على نشر دالة المساهمة $\text{ع}_{\text{ن}}(\theta) = \text{ع}_{\text{ن}}(\text{س};\theta)$ وفق متسلسة تيلور بالنسبة للقيمة الحقيقية للمعلمة θ وملاحظة هذا المنشور في النقطة $\hat{\theta}_{\text{ن}}$، نجد:

$$0 = \text{ع}_{\text{ن}}(\hat{\theta}_{\text{ن}}) = \text{ع}_{\text{ن}}(\theta) + (\hat{\theta}_{\text{ن}} - \theta)\,\text{عَ}_{\text{ن}}(\theta) + \frac{1}{2}(\hat{\theta}_{\text{ن}} - \theta)^2\,\text{عً}(\theta^*)$$

حيث θ^* نقطة ما بين θ،$\hat{\theta}_{\text{ن}}$. وهذه المساواة يمكن كتابتها على الشكل:

$$\sqrt{\text{ن}}\,(\hat{\theta}_{\text{ن}}-\theta)=\frac{\text{ع}_{\text{ن}}(\theta)}{\sqrt{\text{ن}}\ \text{ي}(\theta)}\left[-\frac{\text{ع}'_{\text{ن}}(\theta)}{\text{ن}\ \text{ي}(\theta)}+\varepsilon_{\text{ن}}\right]^{-1} \qquad \text{(٢٢)}$$

حيث: $|\varepsilon_{\text{ن}}|=\dfrac{|\theta_{\text{ن}}-\theta|\ |\text{ع}''_{\text{ن}}(\theta^{*})|}{\text{٢ن}\ \text{ي}(\theta)}\le\dfrac{|\theta_{\text{ن}}-\theta|}{\text{٢ي}(\theta)}\,\dfrac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\text{م}(\text{س}_{\text{ر}})$

بما أن $\theta_{\text{ن}}\xrightarrow{\text{ح ء}}\theta$، من الشروط المفروض على الدالة م(س)، وبناءً على الخاصة [(٢) من ٢] ينتج أن $\varepsilon_{\text{ن}}\xrightarrow{\text{ح ء}}0$، وبتطبيق قانون الأعداد الكبيرة على المقدار:

$\dfrac{1}{\text{ن}}\text{ع}'_{\text{ن}}(\theta)=\dfrac{1}{\text{ن}}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\dfrac{\text{د}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}};\theta)}{\text{د}\theta^2}$ آخذين بالاعتبار العلاقة (٤) نجد

$$-\frac{1}{\text{ن}\ \text{ي}(\theta)}\text{ع}_{\text{ن}}(\theta)\xrightarrow{\text{ح ء}}\frac{-1}{\text{ي}(\theta)}\text{و}_{\theta}\left(\frac{\text{د}^2\,\text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}};\theta)}{\text{د}\theta^2}\right)=1$$

وبتطبيق مبرهنة النهاية المركزية على المتغير العشوائي:

$$\frac{1}{\sqrt{\text{ن}}\ \text{ي}(\theta)}\text{ع}_{\text{ن}}(\theta)=\frac{1}{\sqrt{\text{ن}}\ \text{ي}(\theta)}\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}}\frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ق}(\text{س}_{\text{ر}};\theta)}{\text{د}\theta}$$

آخذين بالاعتبار العلاقتين (٣)، و(٤) نجد:

$$L_{\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{ن}}\ \text{ي}(\theta)}\text{ع}_{\text{ن}}(\theta)\right)\longrightarrow\text{ن}\left(0،\frac{1}{\text{ي}(\theta)}\right)$$

عندما ن ⟵ ∞. ومن ذلك ومن العلاقة (٢٢) والخاصة [(٤) من ٢] ينتج أن المتغير العشوائي $\sqrt{\text{ن}}(\theta_{\text{ن}}-\theta)$ له نفس التوزيع الحدي أيضاً، أي أن العلاقة (٢٠) صحيحة.

تعتبر العلاقة (٢١) نتيجة مباشرة للعلاقة (٢٠) والخاصة ٣.

نسمي المقدار $\delta^2(\theta)/\text{ن}$ بالتباين المقارب للإحصاء $\text{ت}_\text{ن}$، المحقق للشرط:

$$L_\theta[\sqrt{\text{ن}}(\text{ت}_\text{ن} - \tau(\theta))] \leftarrow \text{ن}(0، \delta^2(\theta))$$

عندما ن ⟵ ∞ عندئذ من العلاقتين (٢٠) و(٢١) ينتج أن التباين المقارب لمقدر المعقولية العظمى $\hat{\theta}_\text{ن}$ (مقدر المعقولية العظمى $\hat{\tau}_\text{ن}$) ينطبق على الحد الأدنى في متباينة كرامر وراو، من أجل تباينات كل المقدرات غير المتحيزة للدالة المعلمية المفروضة.

تعريف: المقدِّر الأكفأ تقاربياً Asymptotically efficieut estimator

إذا كانت س = (س١، ....، سن) عينة عشوائية من توزيع ق(س؛ θ)، وكان المقدِّر $\text{ت}_\text{ن}$ للمعلمة θ طبيعياً بالتقارب ن(θ، ١/ ن ي(θ))، فإن هذا المقدر يكون الأمثل تقاربياً، ومن ثم الأكفأ تقاربياً، ومن أجل أي مقدر $\text{ت}_\text{ن}$ محقق للشرط:

$$L_\theta(\text{ت}_\text{ن}) \longrightarrow \text{ن}(\theta، \delta^2_\text{ت}(\theta)/\text{ن}) \quad \text{.................................} (٢٣)$$

فإن كفاءته التقريبية كفاءة ($\text{ت}_\text{ن}$، θ) تعين كنسبة الحد الأدنى لمتباينة كرامر وراو إلى التباين المقارب للمقدِّر $\text{ت}_\text{ن}$:

$$\text{كفاءة } (\text{ت}_\text{ن}، \theta) = [\text{ي}(\theta)\delta^2_\text{ت}(\theta)]^{-1} \quad \text{.................................} (٢٤)$$

ينتج من العلاقتين (٢٠) و(٢٤) الخاصة الثالثة لمقدرات المعقولية العظمى.

٣. يعتبر المقدِّر $\hat{\theta}_\text{ن}$(س) للمعلمة θ أكفأ تقاربياً، أي أن كفاءته المقاربة:

$$\text{هـ} = \text{كفاءة } (\hat{\theta}_\text{ن}، \theta) \equiv ١ \quad ; \quad \forall \theta \in \theta$$

مثال (١٥):

إذا كانت $\underline{\text{س}}$ = (س١، ....، سن) عينة عشوائية كبيرة من التوزيع:

$\text{ق}(\text{س};\theta) = \theta \text{هـ}^{-\theta \text{س}}$؛ س > ٠. فأوجد مقدر المعقولية العظمى لكل من $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ ،θ، ثم أوجد التوزيع التقريبي لكل منهما بما أن:

$\text{ل}(\underline{\text{س}};\theta) = \theta^{\text{ن}} \text{هـ}^{-\text{ن}\theta\bar{\text{س}}}$ **فإن** $\text{لو}_{\text{هـ}} \text{ل}(\underline{\text{س}};\theta) = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \theta - \text{ن}\theta\bar{\text{س}}$

$$\frac{\text{د}\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ل}(\underline{\text{س}};\theta)}{\text{د}\theta} = \frac{\text{ن}}{\theta} - \text{ن}\bar{\text{س}} = 0 \Leftarrow \theta = \frac{1}{\bar{\text{س}}}$$

أي أن مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ هو $\hat{\theta}_{\text{ر}}(\underline{\text{س}}) = \frac{1}{\bar{\text{س}}}$، وبما أن $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ دالة تناظر أحادية في θ، فإن مقدر المعقولية العظمى لـ $\frac{1}{\theta}$ هو $\tau(\hat{\theta}) = \bar{\text{س}}$.

لنحسب الآن معلومات فيشر حول المعلمة θ.

$$\text{ي}_{\text{ن}}(\theta) = -\text{و}_{\theta}\left(\frac{\text{د}^2\ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ل}(\underline{\text{س}};\theta)}{\text{د}\theta^2}\right) = -\text{و}_{\theta}\left(\frac{-\text{ن}}{\theta^2}\right) = \frac{\text{ن}}{\theta^2} = \text{ن}\ \text{ي}(\theta)$$

وعلى ذلك فالتوزيع التقريبي للمقدر $\hat{\theta}_{\text{ر}}(\underline{\text{س}}) = \frac{1}{\bar{\text{س}}}$ حسب العلاقة (٢٠) هو:

$$L_{\theta}\left(\frac{1}{\bar{\text{س}}}\right) \approx \text{ن}\left(\theta، 1/\text{ن}\ \text{ي}(\theta)\right) = \text{ن}\left(\theta، \theta^2/\text{ن}\right)$$

وبشكل مشابه فالتوزيع التقريبي للمقدر $\bar{\text{س}}$ لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$، حسب العلاقة (٢١) هو:

$$L_{\theta}(\overline{س}) \approx ن\left(\tau(\theta)؛ \frac{[\hat{\tau}(\theta)]}{ن\ ي(\theta)}\right) = ن\left(\frac{١}{\theta}، \frac{(-١/\theta^{٢})^{٢}}{ن/\theta^{٢}}\right) = ن\left(\frac{١}{\theta}، \frac{١}{ن\theta^{٢}}\right)$$

إن مقدرات المعقولية العظمى ليست دائماً طبيعية بالتقارب، وكمثال على ذلك، نذكر مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ في توزيع ح(٠، θ)، هو كما نعلم $\hat{\theta}_{ن}(س) = س_{(ن)}$، وأن:

$$L_{\theta}\left(\frac{ن}{\theta}(\theta - \hat{\theta}_{ن}(س))\right) \longrightarrow ٦(١، ١).$$

عندما ن ⟵ ∞ أي أن التوزيع $\hat{\theta}_{ن}(س)$ المقارب هو توزيع أسي. هكذا، التوزيع المقارب للمقدر $\hat{\theta}(س) = س_{(ن)}$ ليس طبيعي، والسبب في ذلك يكون في عدم نظامية النموذج ح(٠، θ).

طريقة العزوم The method of Momemts

تعتبر طريقة العزوم تاريخياً إحدى أقدم طرق التقدير، والتي قدمت من قبل العالم الإحصائي كارل بيرسون عام ١٨٩٤م. ويتمثل جوهر هذه الطريقة في المساواة بين بعض عزوم المجتمع وعزوم العينة المناظرة لها، فنحصل بذلك على جملة من المعادلات بحلها بالنسبة لمعالم المجتمع نحصل على التقديرات المطلوبة، التي تدعى بتقديرات طريقة العزوم. وبعبارة أخرى تؤخذ العزوم التجريبية (عزوم العينة) كتقديرات للعزوم والنظرية (عزوم المجتمع) الموافقة لها، ومنها نستخلص تقديرات معالم المجتمع بدلالة العزوم التجريبية. لنوضح ذلك على النحو الآتي:

لتكن س = (س١، ....، سن) عينة عشوائية من التوزيع:

$$L(\zeta) \ni \text{ق} = \{\text{ق}(\text{س} \,؛\, \mu) \mu \ni \theta\}$$

حيث $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_r) \ni \theta \geq \text{ح}^{r}$، ولنفترض أن العزوم الإبتدائية الـ ر الأولى للمتغير العشوائي الملاحظ ζ موجودة:

$$\alpha_k = \text{و}\,\zeta^{k} ؛ \qquad k = 1، 2، \ldots\ldots\ldots r$$

وتعتبر هذه العزوم، بصورة عامة، دوال في المعلمة المجهولة θ، أي أن:

$\alpha_k = \alpha_k(\theta)$ والعزوم الابتدائية التجريبية الموافقة لها:

$$\text{أ}_{نk}(\text{س}) = \frac{1}{ن} \sum \text{س}_{ي}^{k}$$

و $\alpha_k = \text{أ}_{نk}(\text{س})$ قيم تلك العزوم عند العينة المشاهدة س=(س$_1$، ....، س$_ن$) بمساواة العزوم الابتدائية للمجتمع بما يناظرها من عزوم العينة فإننا نحصل على المعادلات:

$$\alpha_k(\theta) = \text{أ}_k \qquad ؛ k = 1، 2، \ldots\ldots، r \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وبحل هذه المعادلات بالنسبة لـ θ_1،.........، θ_r نصل إلى التقديرات $\bar{\theta}_1$،.......$\bar{\theta}_r$ ومن الواضح أن هذه التقديرات دوال في عزوم العينة.

يمكن بسهولة إثبات أن عزوم العينة أ$_{نk}$(س) تعتبر مقدرات غير متحيزة ومتسقة للعزوم النظرية $\alpha_k(\theta)$ لنفرض أن التوافق بين θ_1،.........، θ_r و α_1،........، α_r يمكن تمثيله بدوال مستمرة وذات تناظر أحادي، أي تواجد دوال مستمرة φ_1،.......،φ_r بحيث أن:

$$\theta_{ي} = \varphi_{ي}(\alpha_1، \ldots\ldots، \alpha_r) \qquad ؛ ي = 1، \ldots\ldots، r$$

والمقدرات الموافقة: $\bar{\theta}_{ي}(\text{س}) = \varphi_{ي}\left(\text{أ}_{1}(\text{س}), \ldots\ldots, \text{أ}_{ر}(\text{س})\right)$

حسب مبرهنة سابقة فالمقدرات متقاربة احتمالياً، عند كل $\theta \ni \theta$، من $\theta_{ي}$ وهذا يعني أن الإحصاءات $\bar{\theta}_{ي}(\text{س})$ تعتبر مقدرات متسقة للمعالم $\theta_{ي}$، ي=١،.....،ر.

هكذا، طريقة العزوم عند شروط معينة، تعطي مقدرات متسقة. وعندئذ المعادلات (١) في حالات عدة بسيطة وحلها (خلافاً لطريقة المعقولية العظمى) لا يتطلب عمليات حسابية معقدة. ولكن الكفاءة التقريبية للمقدرات التي نحصل عليها بهذه الطريقة اقل من واحد.

مثال (١):

إذا كان س= (س١، ....، سن) عينة عشوائية من توزيع T (θ_1، θ_2)، فأوجد مقدر كل من المعلمتين θ_1، θ_2 باستخدام طريقة العزوم.

بما أن:

$$\text{ق}(\text{س}؛ \theta_1؛ \theta_2) = \frac{1}{\theta_2^{\theta_1} T(\theta_1)} \text{س}^{\theta_1 - 1} \text{هـ}^{-\text{س}/\theta_2} \quad ؛ \quad \theta_1، \theta_2 > 0 \text{ ، س} > 0$$

وعلى ذلك: $\propto_{ك} = \frac{1}{\theta_2^{\theta_1} T(\theta_1)} \int_0^\infty \text{س}^{ك} \text{س}^{\theta_1 - 1} \text{هـ}^{-\text{س}/\theta_2} . \text{دس} =$

$$\frac{1}{\theta_2^{\theta_1} T(\theta_1)} \int_0^\infty \text{س}^{\theta_1 + ك - 1} \text{هـ}^{-\text{س}/\theta_2} . \text{دس}$$

وبوضع $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\theta_2}$ نجد: $\propto_{ك} = \frac{\theta_2^{\theta_1 + ك}}{\theta_2^{\theta_1} T(\theta_1)} \int_0^\infty \text{ص}^{\theta_1 + ك - 1} \text{هـ}^{-\text{ص}} . \text{دص} =$

$$\frac{\theta_2^{ك} T(\theta_1 + ك)}{T(\theta_1)}$$

وبإعطاء ك= ١،٢ نحصل على: $\alpha_1 = \theta_1\theta_2$ ، $\alpha_2 = \theta_1\theta_2^2(1+\theta_1)$

لكـن: $\alpha_1 = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي = \overline{س}$ ، $\alpha_2 = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي^2 = \overline{س^2}$ وبالتـالي فمعـادلتي التقدير هما:

$$\bar{\theta}_1 = \frac{\overline{س}^2}{\overline{س^2} - \overline{س}^2} = \frac{\overline{س}^2}{م^2} \quad ، \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\overline{س^2} - \overline{س}^2}{\overline{س}} = \frac{م^2}{\overline{س}}$$

أي أن مقدري العزوم. $\bar{\theta}_1(س) = \frac{\overline{س}^2}{م^2}$ ، $\bar{\theta}_2(س) = \frac{م^2}{\overline{س}}$

مثال (٢):

إذا كانـــت س= (س١، ....، سن) عينـــة عـــشوائية مـــن التوزيـــع $L(\zeta) \in ن(\theta_1, \theta_2^2)$، فأوجد مقدر العزوم للمعلمة $\theta = (\theta_1, \theta_2^2)$.

كما نعلم: $\alpha_1 = و_\theta \zeta = \theta_1$ ، $\alpha_2 = ف_\theta \zeta + (و_\theta \zeta)^2 = \theta_2^2 + \theta_1^2$

$\alpha_1 = \overline{س}$ ، $\alpha_2 = \overline{س^2}$

وبالمساواة نحصل على المعادلتين: $\theta_1 = \overline{س}$ ، $\theta_2^2 + \theta_1^2 = \overline{س^2}$ بحلهما بالنسبة لـ θ_1, θ_2^2 نجد:

$\bar{\theta}_1 = \overline{س}$ ، $\bar{\theta}_2^2 = \overline{س^2} + \overline{س}^2 = م^2$

أي أن مقـدر العـزوم للمعلمـة $\theta = (\theta_1, \theta_2^2)$: $\theta(س) = (\overline{س}, م^2)$ وهـذا نفس مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ .

مثال (٣):

إذا كانـــت س= (س١، ....، سن) عينـــة عـــشوائية مـــن التوزيـــع:

$\text{ق}(\text{س} \,؛\, \theta) = \theta\,\text{س}^{\theta-1}$، $\text{٠} \le \text{س} \le \text{١}$ **فأوجد مقدر العزوم للمعلمة** θ.

$$\alpha_{1} = \int_{0}^{1} \theta\,\text{س}^{\theta}\,\text{دس} = \frac{\theta}{\theta+1}$$

وعلى ذلك: $\frac{\theta}{\theta+1} = \overline{\text{س}} \Leftarrow \bar{\theta} = \frac{\overline{\text{س}}}{1-\overline{\text{س}}}$ **وبالتالي مقدر العزوم للمعلمة** θ:

$\bar{\theta}(\text{س}) = \frac{\overline{\text{س}}}{1-\overline{\text{س}}}$ **وهـــو مختلــف عـــن مقـــدر المعقوليـــة العظمـــى:**

$$\hat{\theta}(\text{س}) = -\frac{\text{ن}}{\sum_{1}^{\text{ن}} \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{س}_{\text{ي}}}$$

مثال (٤):

إذا كانـــت س= (س١، .....، سن) عينـــة عـــشوائية مـــن التوزيـــع $L(\zeta) \in T(\alpha\text{،}1 / \beta)$ **فأوجد مقدر العزوم لكل من المعلمتين** α، β.

نعلم أن $\theta = (\alpha\text{،}\beta)$ ، $\text{و}\zeta_{\theta}^{2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta}$ ، $\text{و}\zeta_{\theta} = \frac{\alpha}{\beta}$

وعلى ذلك: $\overline{\text{س}} = (\alpha\text{،}\beta)$ ، $\overline{\text{س}^{2}} = \alpha(\alpha+1)/\beta^{2}$

لـ α،β **نجد:** $\bar{\alpha} = \frac{\overline{\text{س}}^{2}}{\text{م}_{2}}$ ، $\bar{\beta}(\text{س}) = \frac{\overline{\text{س}}}{\text{م}_{2}}$

نلاحظ أن طريقة العزوم لا تستخدم عندما تكون العزوم من المراتب المطلوبة غير موجودة (فمثلاً، في حالة توزيع كوشي). بالإضافة لذلك، يقال بشكل عام أن مقدرات طريقة العزوم ليست أكفأ بهذا تستخدم غالباً كتقريب أولي لإيجاد مقدرات أكثر كفاءة نحصل عليها بطرق أخرى (فمثلاً، طريقة التراكم).

طرق أخرى Other methods:

هناك طرق أخرى مختلفة للحصول على مقدرات نقطية للمعالم. نذكر منها:

١. طريقة س^{٢} الصغرى.

٢. طريقة المسافات الصغرى.

٣. طريقة بتمان.

٤. طريقة بيز.

سندرس بشكل موجز في هذا البند الطرق الثلاث الأولى.

طريقة $\chi^{٢}$ الصغرى Minimum – chi – wquare Mefhod:

يمكن الحصول على مجموعة من الطرق لإيجاد تقديرات معالم توزيع ق(س؛θ)، وذلك بناءً على صياغة مقياس د بهذه الطريقة أو تلك لقياس إغراف دالة التوزيع التجريبي ق$_{ن}^{*}$(س) عن ق(س؛θ) ويعتبر مثل ها المقياس في كل الحالات دالة في العينة س = (س$_{١}$،....،س$_{ن}$) والمعلمة θ، أي أن د =د(س؛θ).

إذا وجد مثل هذا المقياس، فعندئذ كتقدير للمعلمة θ نأخذ القيمة التي تجعل د تبلغ أصغر قيمة ممكنة لها. وإحدى أهم وأكثر مثل هذه المقاييس استخداماً هو ما يدى بمقياس $\chi^{٢}$ كاي، الذي قدم من قبل العالم كارل بيرسون. ويتعين هذا المقياس (مقياس $\chi^{٢}$) على النحو الآتي: نقسم مجموعة القيم الممكنة Ω_{ζ} للمتغير العشوائي الملاحظ ζ (نطاق ζ) إلى ك مجموعة جزئية (خلية)

منفصلة $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_k$ ؛ $\left(\bigcup_{i=1}^{k} \zeta_i = \zeta_i \cap \zeta_r = \phi ; \ i \neq r\right)$. وليكن المتغير العشوائي γ_r.

يشير إلى عدد العناصر العينة س = (س١،.....،سن) التي تقع في الخلية ζ_i، أي أن.

$$\gamma_r = \left| \{ي ،س_ي \in \zeta_r\} \right| ؛ ر = ١،.....،ك، \left(\sum_{1}^{k} \gamma_r = ن\right)$$

لنرمز $ح_ر(\theta)$ لاحتمال وقوع المتغير العشوائي الملاحظ ζ في الخلية ζ_i؛ وهذا يمكن إيجاده، بحيث إذا كانت ق(س؛θ) دالة توزيع ζ فإن:

$$ح_ر(\theta) = ح_\theta(\zeta \in \zeta_i) = \int_{\zeta_i} دق(س؛\theta) ؛ ر = ١، ....،ك$$

حيث أن $\sum_{ر=1}^{k} ح_ر(\theta) = 1$

إن التكرار النسبي $\frac{\gamma_r}{ن}$ لوقوع عناصر العينة س في الخلية ζ_i يعتبر مقدر متسق للاحتمال $ح_ر(\theta)$، لهذا مقياس انحراف معطيات العينة عن القيم النظرية الموافقعة لها يمكن إعطاءه بالمقياس المعرف على الصورة:

$$د = \sum_{ر=1}^{k} جـ_ر(\gamma_r / ن - ح_ر(\theta))^2$$

إذا وضعنا هنا جـر = ن/ $ح_ر(\theta)$، فنحصل على مقايس χ^2:

$$\chi^2 = \sum_{ر=1}^{k} \frac{ن}{ح_ر(\theta)}\left(\frac{\gamma_r}{ن} - ح_ر(\theta)\right)^2 = \sum_{ر=1}^{k} \frac{(\gamma_r - ن\ ح_ر(\theta))^2}{ن\ ح_ر(\theta)}$$

يمثل المقدار $\sum_{ر=1}^{k}(\gamma_r - ن ح_ر(\theta))^2$ مجموع مربعات الفروقات بين العدد الملاحظ والمتوقع لوقوع الملاحظات في الخلية ζ_r؛ ر = $\overline{1k}$. ويمكن كتابة العلاقة

(١) على النحو الآتي:

$$\chi^{٢} = \sum_{ر=١}^{ك} \frac{\gamma_{ر}^{٢}}{ن\,ح_{ر}(\theta)} - ن$$

سترمز للقيمة الملاحظة للمتغير العشوائي $\gamma_{ر}$ بـ $ن_{ر}$. وتجدر الاشارة هنا إلى أن مقدر $\chi^{٢}$ الصغرى يعتمد على التجزأة المقترحة $\zeta_{١}، \zeta_{٢}، \ldots، \zeta_{ك}$.

لاحقاً سنستخدم أحياناً رمزاً آخراً للدلالة على هذا المقياس يدعي بمقياس $\chi^{٢}$، وله توزيع $\chi^{٢}$.

أن مقدر المعلمة θ، الذي نحصل عليه من شرط بلوغ المقياس $\chi^{٢}$ قيمته الصغرى، يدعى بمقدر طريقة $\chi^{٢}$ الصغرى. وأن هذا المقدر، عند شروط عامة، يتمتع بالخصائص التالية: متسق، طبيعي بالتقارب، والأكفأ تقاربياً (كمقدر المعقولية العظمى).

لإيجاد تقديرات طريقة $\chi^{٢}$ الصغرى يجب حل منظومة المعادلات:

$$\sum_{ر=١}^{ك} \frac{\gamma_{ر}^{٢}}{ح_{ر}^{٢}(\theta)} \frac{د ح_{ر}(\theta)}{د\theta_{ي}} = ٠ \text{ ؛ } ي = ١، ٢، \ldots، ر، \quad (\theta = (\theta_{١}، \ldots، \theta_{ر})) \ldots\ldots (٢)$$

التي نحصل عليها من الشرط $\frac{د\chi^{٢}}{د\theta} = ٠$ لكن حل هذه المنظومة ليس سهلاً حتى في أبسط الحالات، لهذا نستبدل عادة بمنظومة المعادلات.

$$\sum_{ر=١}^{ك} \frac{\gamma_{ر}}{ح_{ر}(\theta)} - \frac{د ح_{ر}(\theta)}{د\theta_{ر}} = ٠ \text{ ؛ } ي = ١، ٢، \ldots، ر \ldots\ldots\ldots (٣)$$

التي حلها أبسط بكثير. والمقدرات التي تحصل عليها بناءً على حل منظومة المعادلات (٣)، عند شروط معينة، تتمتع في حالة عينات كبيرة الحجم بنس

الخواص المقاربة التي تتمتع بها مقدرات طريقة χ^2 الصغرى باستخدام حل منظومة المعادلات (٢).

لهذه الطريقة في تقدير معالم توزيع أهمية عند اختبار جودة التلاؤم باستخدام اختبار χ^2.

مثال (١):

إذا كانت س = (س١،....، سن) عينة عشوائية من التوزيع $L(\zeta) \ni \Pi(\theta)$ فأوجد مقدر طريقة χ^2 الصغرى:

لنأخذ $\zeta_{\text{ر}} = \{\text{ر}-1\}$ ؛ $\text{ر} = 1, \ldots\ldots, \text{ك}-2$ ، $\zeta_{\text{ك}} = \{\text{ك}-1, \text{ك}, \ldots\ldots\}$

عندئذٍ:

$$\text{ح}_{\text{ر}}(\theta) = \text{ق}(\text{ر}-1;\theta) = \frac{\theta^{\text{ر}-1}}{(\text{ر}-1)!}\text{هـ}^{-\theta} \quad ; \quad \text{ر} = 1, \ldots\ldots, \text{ك}-2$$

$$\text{ح}_{\text{ك}}(\theta) = \sum_{\text{ل}=\text{ك}+1}^{\infty} \text{ق}(\text{ل};\theta) = \sum_{\text{ل}=\text{ك}-1}^{\infty} \frac{\theta^{\text{ل}}}{\text{ل}!}\text{هـ}^{-\theta}$$

حيث أن $\text{ق}(\text{س};\theta) = \frac{\theta^{\text{س}}}{\text{س}!}\text{هـ}^{-\theta}$ ؛ س = ٠، ١، ....

وعلى ذلك:

$$\frac{\text{د}\text{ح}_{\text{ر}}(\theta)}{\text{د}(\theta)} = \left[\frac{(\text{ر}-1)\theta^{\text{ر}-2}}{(\text{ر}-1)!} - \frac{\theta^{\text{ر}-1}}{(\text{ر}-1)!}\right]\text{هـ}^{-\theta} = \left(\frac{\text{ر}-1}{\theta} - 1\right)\frac{\theta^{\text{ر}-1}}{(\text{ر}-1)!}\text{هـ}^{-\theta}$$

$$\frac{\text{د}\text{ح}_{\text{ك}}(\theta)}{\text{د}(\theta)} = \sum_{\text{ل}=\text{ك}-1}^{\infty}\left(\frac{\text{ل}\,\theta^{\text{ل}-1}}{\text{ل}!}\text{هـ}^{-\theta} - \frac{\theta^{\text{ل}}}{\text{ل}!}\text{هـ}^{-\theta}\right) = \sum_{\text{ل}=\text{ك}-1}^{\infty}\left(\frac{\text{ل}}{\theta} - 1\right)\frac{\theta^{\text{ل}}}{\text{ل}!}\text{هـ}^{-\theta}$$

$$= \sum_{ل=ك-1}^{\infty} \left(\frac{ل}{\theta} - 1 \right) ق(ل؛\theta)$$

وبالتعويض في (٣) نجد:

$$\sum_{ر=0}^{ك-1} \left(\frac{ر}{\theta} - 1 \right) \gamma_{ر+1} + \gamma_{ك} \sum_{ل=ك-1}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right) ق(ل؛\theta) \Big/ \sum_{ل=ك-1}^{\infty} ق(ل؛\theta) = 0$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـ θ نحصل على مقدر طريقة χ^2 الصغرى للمعلمة θ:

$$\theta^*(س) = \frac{1}{ن} \left[\sum_{ر=0}^{ك-2} ر\, \gamma_{ر+1} + \gamma_{ك} \sum_{ل=ك-1}^{\infty} ل\, ق(ل؛\theta) \Big/ \sum_{ل=ك-1}^{\infty} ق(ل؛\theta) \right]$$

نلاحظ أن الحد الأول (ضمن القوسين) يمثل مجموع $س_ي$ حيث أن $س_ي \geq$ ك-٢، والحد الثاني يساوي تقريباً $س_ي$، حيث $س_ي \leq$ ك-٢. (حيث أن $س_1$، ......، $س_ن$ القيم الملاحظة للمتغير ζ)، أي أن $\theta^*(س) \approx \bar{س}$

مثال (٢):

لتكن س = ($س_1$،.....، $س_ن$) عينة عشوائية من توزيع بيرنولي ب(١، θ)، ونريد ايجاد مقدر θ باستخدام طريقة χ^2 الصغرى.

لنأخذ $\gamma_ر$ = عدد الملاحظات في العينة س المساوية لـ ر ، ر = ٠، ١. أي أن مدى التغير العشوائي الملاحظ ζ جزء إلى خليتين:

$$\zeta_0 = \{0\}\ ،\ \zeta_1 = \{1\}$$

ومن ثم: $$\chi^2 = \sum_{ر=0}^{1} \frac{[ن_ر - ن ح_ر(\theta)]^2}{ن ح_ر(\theta)} = \frac{(ن_1 - ن\theta)^2}{ن} \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

أو $\chi^{2} = \sum_{\text{ر}=\cdot}^{\text{١}} \frac{\text{ن}_{\text{ر}}^{\text{٢}}}{\text{ن}\,\text{ح}_{\text{ر}}(\theta)} - \text{ن} = \frac{\text{ن}_{\cdot}^{\text{٢}}}{\text{ن}(\text{١}-\theta)} + \frac{\text{ن}_{\text{١}}^{\text{٢}}}{\text{ن}\,\theta} - \text{ن}$

حيث $\text{ن}_{\text{ر}}$ ، ر = ٠، ١ القيمة الملاحظة للمتغير العشوائي $\gamma_{\text{ر}}$:

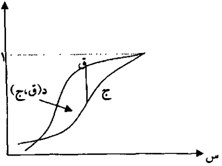
نلاحظ بسهولة أن القيمة الصغرى لـ χ^{2} كدالة في θ هي عبارة عن قيمة χ^{2} وذلك عندما $\theta = \theta^{*} = \frac{\text{ن}_{\text{١}}}{\text{ن}}$، ومن ثم مقدر χ^{2} الصغرى للمعلمة θ هو $\theta^{*}(\text{س}) = \frac{\gamma_{\text{١}}}{\text{ن}}$.

طريقة المسافة الصغرى Miumum – Distance method

لتكن س = ($\text{س}_{\text{١}}$،....، $\text{س}_{\text{ن}}$) عينة عشوائية من توزيع ق(س؛ θ)، ولتكن د(ق، ج) دالة المسافة، اتي تعين التباعد الأقصى بين دالتي التوزيع ق، ج وكمثال لدالة المسافة نذكر:

$$\text{د}\,(\text{ق، ج}) = \text{قيمة}_{\text{س}}\ \text{قصوى}\ |\text{ق(س)} - \text{ج (س)}|$$

التي تمثل أكبر مسافة شاقولية (رأسية) بين ق و ج ويبدو ذلك بوضوح على الشكل (١).



شكل (١)

إن تقدير طريقة المسافة الصغرى للمعلمة θ وليكن θ^* هو عبارة عن القيمة $\theta \ni \theta$ التي تجعل د [ق (س؛ θ)، $\text{ق}^*_{\text{ن}}$ (س)] تبلغ نهاية صغرى حيث $\text{ق}^*_{\text{ن}}$ (س) دالة التوزيع التجريبي هكذا، يتم اختيار θ^* بحيث تكون ق (س؛ θ)* الأقرب إلى $\text{ق}_{\text{ن}}$(س) ضمن عائلة النموذج ق = { ق (س؛ θ)، $\theta \ni \theta$} ومن الطبيعي دائماً الرغبة في الحصول على مقدر المسافة الصغرى لكن غالباً إيجاد ذلك أمر صعب. والمثال الآتي يعتبر استثناءً.

مثال (٣):

لتكن س = (س١،....، سن) عينة عشوائية من توزيع بيرنولي:

$$\text{ق (س؛ }\theta) = \begin{cases} ٠ & \text{؛ س} \leq ٠ \\ ١-\theta & \text{؛ } ٠ < \text{س} \leq ١ \\ ١ & \text{؛ س} > ١ \end{cases} \quad \text{حيث } ٠ \leq \theta \leq ١$$

لنرمز بـ نر لعدد الملاحظات المساوية لـ ر، ر = ٠، ١. عندئذٍ:

$$\text{ق}^*_{\text{ن}}(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & \text{؛ س} \leq ٠ \\ \text{ن}_٠ / \text{ن} & \text{؛ } ٠ < \text{س} \leq ١ \\ ١ & \text{؛ س} > ١ \end{cases}$$

الآن إذا استخدمنا دالة المسافة د (ق،ج) = قيمة قصوى |ق(س) − ج(س)|، فإن د[ق (س؛ θ)، $\text{ق}^*_{\text{ن}}$ (س)] تبلغ نهاية صغرى إذا أخذنا:

$$١ - \theta = \text{ن}_٠ / \text{ن} \text{ أو : } \theta = \text{ن}_١ / \text{ن} = \frac{١}{\text{ن}} \sum_{١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ي}} = \overline{\text{س}}$$

أي أن مقدر المساحة الصغرى:

$$\theta^*(\text{س}) = \overline{\text{س}}$$

مقدر بتمان لمعلمة الوضـع والمقيـاس Pitman Estimator of Location and Scale Parametrec لتعرف في البداية معلمة الموضع ومعلمة المقياس.

تعريف: معلمة الوضع Location Parametrec:

إذا كان التوزيع الاحتمالي ق (س؛ θ) للمتغير العشوائي ζ يعتمد عـل معلمة ما θ وحيدة البعد، فيقال أن θ معلمة موضع إذا أمكن كتابه ق (س؛ θ) كدالة في (س − θ)، أي أن:

$$\text{ق}\,(\text{س};\,\theta) = \text{ج}\,(\text{س} - \theta)$$

حيث ج (٠) دالة ما وبعبارة أخرى نقول عن معلمة θ أنها معملة موضع إذا كان التوزيـع الإحتمـالي للمـتغير الـشعوائي ζ = ζ− θ، لا يعتمـد علـى θ، وتوزيع ζ يكون:

$$\text{ج}\,(\text{ص}) = \text{ق}\,(\text{ص} + \theta;\,\cdot)$$

مثال (٤):

إذا كان ζ متغير عشوائي دالة كثافته الإحتمالية:

$$\text{ق}\,(\text{س};\,\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}(\text{س}-\theta)^2} \;;\; -\infty < \text{س} < +\infty$$

فإن θ معلمة موضع لأن ق(س؛ θ) دالة في (س− θ)وتوزيع ع=ع− θهو

$$\text{ج}(\text{ص}) = \text{ق}(\text{س} + \theta, \cdot) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{2}\text{ص}^2} \;;\; -\infty < \text{س} < +\infty$$

أي إذا كان L (ζ) ∋ ن(θ،١) فإن L(ζ) = ن(٠، ١)

وكمثال آخر لمعلمة الموضع المعلمة θ في التوزيع ح (θ-١/٢، θ+١/٢)

تعريف: معلمة قياس Scale Parameter:

إذا كان التوزيع الاحتمالي ق (س؛ θ) للمتغير العشوائي ζ يعتمد على معلمة θ وحيدة البعد، فيقال أن θ معلمة مقياس إذا أمكن ق (س؛ θ) على الصورة:

ق (س؛ θ) = $\frac{1}{\theta}$ ج$\left(\frac{\text{س}}{\theta}\right)$ حيث ج(·) دالة ما. وعندئذ يكون توزيع المتغير العشوائي ζ = $\frac{\zeta}{\theta}$:ج(ص) = ق (θص،١) وهو لا يعتمد علىθ.

مثال (٥):

إذا كان ζ متغير عشوائي كثافة توزيعه: ق (س؛ θ) = $\frac{1}{\theta}$هـ$^{-\text{س}/\theta}$؛ س> ٠

فإن θ معلمة مقياس، لأنه إذا وضعنا ζ = $\frac{\zeta}{\theta}$ فإن كثافة توزيع ζ هي:

ج (ص) = ق(ص θ،١) = هـ$^{-\text{ص}}$ ؛ ص > ٠ لا يعتمد على θ.

وكأمثلة أخرى على معلمة المقياس نذكر المعلمة θ في النموذج الطبيعي ن(٠، θ^2) وكذلك θ في النموذج المنتظم ح(٠، θ)

* مقدر بتمان لمعلمة الوضع:

تعطي المبرهنة الآتية التي سنقبلها بدون إثبات، مقدر بتمان لمعلمة موضع θ (وحيدة البعد) في التوزيع ق(س؛ θ)، وتبين أن له أقل متوسط مربع خطأ بانتظام بين مجموعة مقدرات الموضع.

مبرهنة: إذا كان س= (س١،...، سن) عينة عشوائية مأخوذة من التوزيع ق(س؛ θ)، وكانت θ معلمة موضع وحيدة البعد، فإن الإحصاء ت(س) المعرف بالعلاقة:

$$\text{ت}(\text{س}) = \frac{\int \theta \; \text{ل}\,(\text{س};\theta)\; \text{دس}}{\int \text{ل}\,(\text{س}،\theta)\,.\text{د}\theta}$$

هو مقدر للمعلمة θ بأقل متوسط مربع خطأ بانتظام بين مجموعة مقدرات الموضع، ويدعى هذا المقدر لمعلمة الموضع θ بمقدر بتمان، ومن ثم فإن أية قيمة ت= ت(س) تدعى بتقدير بتمان لـθ.

مثال (٦):

إذا كانت س= (س١،...، سن) عينة عشوائية مأخوذة من توزيع ن(θ،٤) فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ.

يمكن التأكد بسهولة أن θ معلمة موضع. وبما أن: ق(س؛ θ) = $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,\text{هـ}^{-\frac{1}{8}(\text{س}-\theta)^{2}}$ فإن ل(س، θ) = $(8\pi)^{-\frac{\text{ن}}{2}}$ تقريب $\left\{-\frac{1}{8}\left[\sum_{\text{ي}=1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\theta)^{2}\right]\right\}$ =$(8\pi)^{-\frac{\text{ن}}{2}}$ تقريب $\left\{-\frac{1}{8}\left[\sum_{1}^{\text{ن}}(\text{س}_{\text{ي}}-\bar{\text{س}})^{2}+\text{ن}(\theta-\bar{\text{س}})^{2}\right]\right\}$ وعلى ذلك فإن تقدير بتمان:

$$\text{ت} = \text{ت}(\text{س}) = \frac{\int \theta\; \text{ل}(\text{س};\theta)\; \text{د}\theta}{\int \text{ل}(\text{س};\theta)\; \text{د}\theta} = \frac{\int \theta \;\; \text{تقريب}\left[-\frac{\text{ن}}{8}(\theta-\bar{\text{س}})^{2}\right]\text{د}\theta}{\int \;\text{تقريب}\left[-\frac{\text{ن}}{8}(\theta-\bar{\text{س}})^{2}\right]\text{د}\theta}$$

$$= \frac{\int \theta \frac{\sqrt{ن}}{2\sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{ن}{8}(\theta-\bar{س})^2} د\theta}{\int \frac{\sqrt{ن}}{2\sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{ن}{8}(\theta-\bar{س})^2} د\theta}$$

نلاحظ أن $\frac{\sqrt{ن}}{2\sqrt{2\pi}} هـ^{-\frac{ن}{8}(\theta-\bar{س})^2}$ ما هي إلا دالة كثافة التوزيع الطبيعي المتغير العشوائي θ بمتوسط $\bar{س}$ وتباين $\sigma^2 = \frac{4}{ن}$، وبتالي فإن التكامل في البسط عبارة عن و $\theta = \bar{س}$ بينما التكامل في المقام يساوي الواحد. أي أن ت = $\bar{س}$، ومن ثم فمقدر بتمان: ت = ت(س) = $\bar{س}$. يمكن التأكد من أن ت = $\bar{س}$ مقدر غير متحيز وتباينه يساوي الحد الأدنى من متباينة كرامر ورامر، أي أنه المقدر الأمثل (ومن ثم الأكفأ) للمعلمة θ.

مثال (٧) :

إذا كانت س= (س١،...، سن) عينة عشوائية مأخوذة من توزيع منتظم ح($\theta - \frac{1}{2}$ ، $\theta + \frac{1}{2}$)، فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ.

بما أن θ معلمة موضع في التوزيع ح ($\theta - \frac{1}{2}$ ، $\theta + \frac{1}{2}$)، ق(س؛ θ) = ١ ؛ $\theta - \frac{1}{2} \le$ س $\le \theta + \frac{1}{2}$ فإن:

ل(س؛ θ) = ١؛ $\theta - \frac{1}{2} \le$ س₍١₎ $\le$ س₍ن₎ $\le \theta + \frac{1}{2}$ إذن ل(س؛ θ) = ١ ؛ صن $- \frac{1}{2} \le \theta \le$ ص١ $+ \frac{1}{2}$ حيث إن: ص١ = س₍١₎، صن = س₍١₎

وعلى ذلك:

ت = ت(س) =

$$\int_{\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2}}^{\text{ص}_{1}+\frac{1}{2}} \theta\ \text{ل}(\text{س};\theta).\text{د}\,\theta \Big/ \int_{\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2}}^{\text{ص}_{1}+\frac{1}{2}} \text{ل}(\text{س};\theta).\text{د}\,\theta = \int_{\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2}}^{\text{ص}_{1}+\frac{1}{2}} \theta\ \text{د}\,\theta \Big/ \int_{\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2}}^{\text{ص}_{1}+\frac{1}{2}} \text{د}\,\theta$$

$$= \left(\frac{\theta^{2}}{2} \Big|_{\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2}}^{\text{ص}_{1}+\frac{1}{2}} \Big/ \theta \Big|_{\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2}}^{\text{ص}_{1}+\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ص}_{1}+\frac{1}{2})^{2}-(\text{ص}_{ن}-\frac{1}{2})^{2}}{(\text{ص}_{1}+\frac{1}{2})-(\text{ص}_{ن}+\frac{1}{2})} = \frac{\text{ص}_{1}+\text{ص}_{2}}{2}$$

وبالتالي فمقدر بتمان: ت (س) = $\frac{\text{س}_{(1)}+\text{س}_{(ن)}}{2}$

* مقدر بتمان لمعلمة مقياس:

إذا كانت س= (س١،...، سن) عينة عشوائية مأخوذة من توزيع متغير عشوائي ζ يفترض قيماً موجبة ويعتمد على معلمة مقياس وحيدة البعد $\theta > 0$، فإن المبرهنة الآتية تعطي مقدر بتمان لـθ:

مبرهنة (٢):

إن مقدر بتمان لمعلمة المقياس θ في التوزيع ق(س؛ θ) للمتغير العشوائي ζ يعطي بالعلاقة:

ت = ت(س) = $\dfrac{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\theta^{2}}.\text{ل}(\text{س};\theta).\text{د}\,\theta}{\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\theta^{3}}.\text{ل}(\text{س};\theta).\text{د}\,\theta}$ وهذا المقدر هو دالة في إحصاء كافي.

مثال (٨):

إذا كانت س= (س$_١$،...، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع منتظم:

ق(س؛ θ) = $\frac{١}{\theta}$ ؛ ٠ < س ≤ θ. فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ.

نلاحظ أن θ معلمة مقياس، لأنه بوضع ص = $\frac{\text{س}}{\theta}$ نجد:

ج(ص) = ق (θ ص، ١) =١ ؛ ٠ < ص ≤ ١ وهي لا تعتمد على θ بما أن:

$$\text{ل (س، }\theta) = \frac{١}{\theta^{\text{ن}}} ; \quad \theta \leq \text{س}_{(\text{ن})} = \text{ص}_{\text{ن}}$$

فإن تقدير بتمان للمعلمة θ يكون:

$$\text{ت(س)} = \int_{\text{ص}_{\text{ن}}}^{\infty} \frac{١}{\theta^{٢}}\frac{١}{\theta^{\text{ن}}}\,\text{د}\,\theta \Big/ \int_{\text{ص}_{\text{ن}}}^{\infty} \frac{١}{\theta^{٢}}.\frac{١}{\theta^{\text{ن}}}\,\text{د}\,\theta = \int_{\text{ص}_{\text{ن}}}^{\infty} \frac{١}{\theta^{\text{ن}+٢}}\,\text{د}\,\theta \Big/ \int_{\text{ص}_{\text{ن}}}^{\infty} \frac{١}{\theta^{\text{ن}+٣}}.\text{د}\,\theta = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١}\text{ص}_{\text{ن}}$$

وبالتالي مقدر بتمان للمعلمة θ:

$$\text{ت(س)} = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١}\text{ص}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١}\text{س}_{(\text{ن})}$$

بما أن: و$_\theta$ ص$_ن$ = $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}\theta$ لأن كثافة توزيع ص$_ن$ هـو: م(ص) = $\frac{\text{ن}}{\theta^{\text{ن}}}\text{ص}^{\text{ن}-١}$ ؛ ٠ < ص ≤ θ

وعلى ذلك فإن:

$$\text{و}_\theta\,\text{ت(س)} = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١}\ \text{وص}_{\text{ن}} = \frac{\text{ن}+٢}{\text{ن}+١}\ \frac{\text{ن}}{\text{ن}+١}\theta = \frac{\text{ن}(\text{ن}+٢)}{(\text{ن}+١)^{٢}}\theta = \theta - \frac{\theta}{(\text{ن}+١)^{٢}} \neq \theta$$

إذن فمقدر بتمان للمعلمة θ متحيز هذا:

$\text{و}_{\theta}\ \text{ت} - \theta = \frac{\theta}{(\text{ن}+1)^{2}}$ وهو مقدر صغير عندما تكون ن كبيرة.

يمكن إثبات أن المقدر $\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}\text{ص}_{\text{ن}}$ لـ θ غير متحيز وبأقل تباين. ونترك إثبات ذلك للقارئ على سبيل المثال.

مثال (٩):

إذا كانت س= (س١،...، سن) عينة عشوائية من توزيع:

ق(س؛ θ) = $\frac{1}{\theta}\text{هـ}^{-\text{س}/\theta}$ ؛ س > ٠، θ > ٠ فأوجد مقدر بتمان للمعلمة θ. نعلم من المثال (٥) أن θ معلمة مقياس. كما أن:

ل (س، θ) = $\frac{1}{\theta^{\text{ن}}}\text{هـ}^{-\sum \text{س}_{\text{ي}}/\theta}$ وبالتالي فتقدير بتمان للمعلمة θ هو:

$$\text{ت}(\text{س}) = \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\theta^{\text{ن}+2}}\text{هـ}^{-\sum \text{س}_{\text{ي}}/\theta}\,\text{د}\,\theta \Big/ \int_{0}^{\infty}\frac{1}{\theta^{\text{ن}+3}}\text{هـ}^{-\sum \text{س}_{\text{ي}}/\theta}\,\text{د}\,\theta$$

$$= \frac{⅂(\text{ن}+1)\ (\sum \text{س}_{\text{ي}})^{\text{ن}+2}}{(\sum \text{س}_{\text{ي}})^{\text{ن}+1}\ ⅂(\text{ن}+2)} = \frac{\sum \text{س}_{\text{ي}}}{\text{ن}+1}$$

ومن ثم فمقدر بتمان:

ت(س) = $\frac{\text{ن}}{\text{ن}+1}\,\overline{\text{س}}$ وهو مقدر غير متحيز بأقل تباين.

تمارين

١. بفرض س= (س١،...، سن) عينة عشوائية من توزيع:

ق(س؛ θ) = θ س$^{-٢}$ ؛ س ≥ θ > ٠

١. أوجد مقدر المعقولية لـθ، ثم بين أن كل متحيزاً أم لا.

٢. أوجد مقدر العزوم للمعلمة θ، ثم بين أن كان متحيزاً أم لا.

٢. لتكن س= (س١،...، سن) عينة عشوائية من توزيع:

ق(س ؛θ) = $\frac{١}{٢}$ هـ$^{-|س-θ|}$ ؛ − ∞ < θ < + ∞

١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.

٢. أوجد مقدر العزوم لـθ.

٣. أوجد مقدر بتمان لـθ.

٤. هل ينتمي التوزيع ق(س؛ θ) لعائلة النماذج الأسية؟

٣. لتكن س= (س١،...، سن) عينة عشوائية التوزيع: ق(س؛ θ)= $\frac{١}{θ}$ ؛ ٠ ≤ س ≤ θ ، θ > ٠.

أ. أوجد مقدر θ باستخدام طريقة العزوم، وإذا رمزنا له بـ ت١ فأوجد متوسطه ومتوسط مربع الخطأ له.

ب. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ وإذا رمزنا له بـ ت٢، فأوجد

متوسطه ومتوسط مربع الخطأ له.

جـ. أوجد المقدر الأكفأ لـ θ، وإذا رمزنا له بـ ت؛، فأوجد متوسطه ومتوسط مربع الخطأ له.

د. إذا رمزنا بـ ت٥ = س$_{(١)}$ + س$_{(ن)}$، فأوجد متوسط ومتوسط مربع الخطأ له.

٤. لتكن س= (س$_١$،...، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع

ق(س؛ θ) = θ س$^{\theta-1}$ ؛ ٠ < س < ١ ، θ > ٠

أ. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta) = \frac{4\theta+1}{1+\theta}$

ب. هل توجد دالة في θ لها مقدر غير متحيز بأقل تبين؟

٥. لتكن س= (س$_١$،...، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع:

ق(س؛ θ) = θ (١ + س)$^{-(1+\theta)}$ ؛ س > ٠ ، θ > ٠

١. قدر θ باستخدام طريقة العزوم.

٢. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$

٣. أوجد مقدر المعقولية لكل من الدوال:

$$\frac{2}{3+\theta} \quad ، \quad \text{لو}_{هـ}\,\theta \quad ، \quad \frac{3\theta}{5\theta+4}$$

٦. لتكن س= (س$_١$،...، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع: ق(س؛ θ) = $\frac{\text{لو}_{هـ}\theta}{\theta-1}\theta^{س}$؛ ٠ < س < ١ ، θ > ١.

١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.

٢. هل يوجد المقدر الأمثل لـθ، إن وجد فما هو؟

٣. أوجد توزيع مقدر المعقولية لـθ عندما ن $\longrightarrow \infty$.

٤. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta) = 1/(1+\theta)$، ثم أوجد توزيعه عندما ن $\longrightarrow \infty$.

٧. بفرض س= (س١،...، سن) عينة عشوائية من توزيع:

ق (س؛ θ) = جـ$^{س}_{٢}$ θ $(1-\theta)^{٢-س}$ ؛ س = ٠، ١، ٢ ، $\theta > 0$

١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ^2، هل هو غير متحيز؟

٢. هل يوجد المقدر الأمثل لـθ^2.

٣. أوجد توزيع مقدر المعقولية العظمى لـθ^2 عندما ن $\longrightarrow \infty$.

٤. هل مقدر المعقولية العظمى لـ θ^2 متسق.

٨. لتكن س= (س١،...، سن) عينة عشوائية من توزيع:

$$ق(س؛ \theta) = \begin{cases} ٢س/\theta & ؛ \quad ٠ < س \le \theta \\ \dfrac{٢(١-س)}{١-\theta} & ؛ \quad \theta < س \le ١ \end{cases}$$

حيث $0 \le \theta \le 1$

١. مقدر θ بطريقة العزوم.

٢. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ من أجل ن = ١ و ن = ٢

٣. أوجد المقدر الأمثل لـ θ عندما ن = ١ (إن وجد).

٤. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.

٩. بفرض س= (س$_1$،....، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع: ق(س؛ θ) = هـ$^{-(س-θ)}$؛ س ≥ θ ، − ∞ < θ < + ∞.

١. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـθ.

٢. أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$.

٣. أوجد مقدر العزوم للمعلمة θ.

٤. أوجد توزيع مقدر المعقولية العظمى لـθ .

١٠. بفرض س= (س$_1$،....، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيـع ق(س؛ θ)= $\frac{٢س}{\theta^2}$ ؛ ٠ < س < θ ، θ > ٠

١. مقدر المعقولية العظمى للمعلمة θ.

٢. مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau_1(\theta)$ = ١/ θ.

٣. مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau_2(\theta)$= (١+ θ) هـ$^{-\theta}$.

١١. بفرض س= (س$_1$،....، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع τ(θ، λ).

١. أثبت أن مقدر المعقولية العظمى لـ $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ هو $\hat{\tau}_ن = \frac{\lambda}{\bar{س}}$

٢. هل المقدر $\hat{\tau}_ن$ متسق.

٣. أوجد توزيع $\hat{\tau}_ن$ عندما ن ⟵ ∞

١٢. أثبت أن: $\hat{\theta}(س) = \frac{\bar{س}}{ر + \bar{س}}$ ، $\bar{س} = \frac{1}{ن}\sum_{ي=1}^{ن} س_ي$

مقدر المعقولية العظمى لـ θ في النموذج $\bar{ب}$= (ر، θ)، ثم احسب التباين التقريبي له، بفرض ن كبيرة.

١٣. ليكن ζ متغير عشوائي يخضع للتوزيع: ق(س؛ θ) = (٢س/ θ)هـ $^{-س^٢/\theta}$ ؛ س ≥ ٠ أوجد مقدر المعقولية العظمى لـ θ بناءً على عينة عشوائية س= (س$_١$،...، س$_ن$).

١٤. لدينا عينة عشوائية ((س$_١$، ص$_١$)،...، (س$_ن$، ص$_ن$)) من توزيع طبيعي ثنائي البعد:

ن $\left((٠،٠)\ ،\ \begin{Vmatrix} ١ & \theta \\ \theta & ١ \end{Vmatrix}\right)$ ؛ θ ∈ (-١، ١) اثبت ان التباين التقريبي للمقدر $\hat{\theta}_ن$ يساوي (١- θ^٢)^٢ / ن (١+ θ^٢)

١٥. لتكن س= (س$_١$،...، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع: ق(س؛ θ) = $\frac{١}{\theta}$ ؛ θ ≤ س ≤ ٢ θ.

١. أوجد المعقولية العظمى لـ θ

٢. أوجد مقدر بتمان لـ θ

١٦. إذا كانت س= (س$_١$،...، س$_ن$) عينة عشوائية من توزيع ب(θ$_١$، θ$_٢$).

فأوجد مقدر المعقولية العظمى ومقدر العزوم لـ θ=(θ$_١$، θ$_٢$)

١٧. إذا كانت ((س$_١$، ص$_١$)،...، (س$_ن$، ص$_ن$)) عينة عشوائية من توزيع طبيعي ثنائي:

ن ((٠،٠)، ∑) ؛ م = $\begin{Vmatrix} \delta_١^٢ & \rho\delta_١\delta_٢ \\ \rho\,\delta_١\delta_٢ & \delta_٢^٢ \end{Vmatrix}$

الفصل السابع

التكامل المعتل

الفصل السابع

التكامل المعتل

تعريف:

يعرف التكامل المعتل بأنه تكامل محدد تكون حدود هذا التكامل تملك حالة خاصة فإما أن تكون نقطة انقطاع للتابع المكامل أو أن تكون لا نهائية.

ومن التعريف يتضح أن هنالك نوعان هامان من التكامل المعتل وهما:

١. التكامل المعتل من النوع الاول.

ويعرف بأنه التكامل المحدد التابع مستمر ق(س) ومحدود على مجال لا نهائي.

٢. التكامل المعتل من النوع الثاني.

ويعرف بأنه التكامل المحدد التابع ق(س) غير محدد على مجال محدود.

التكامل المعتل من النوع الأول:

تعريف:

هو التكامل المحدد لتابع مستمر ومحدود على مجال لا نهائي ويأتي على أحد الأشكال الآتية:

أ. $\text{ل} = \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق(س)}\ \text{د س}$ ب. $\text{ل} = \int_{-\infty}^{\text{ب}} \text{ق(س)}\ \text{د س}$ جـ. $\text{ك} = \int_{-\infty}^{\infty} \text{ق(س)}\ \text{د س}$

في الواقع سنناقش في دراستنا التالية الحالة (أ) وسوف نعمم نتائجنا على باقي الحالات.

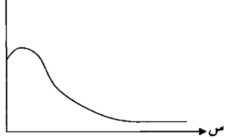
الآن لننظر إلى التكامل ل = $\int_{\text{أ}}^{\infty}$ ق(س)= د س حيث ق(س) كمول كتكامل محدد على المجالات [أ، س] مهما تكن س $\ni$ ح^{+}

ويمكننا الكتابة أن $\int_{\text{أ}}^{\infty}$ ق(س).سد = $\lim_{\text{أ} \to \infty} \int_{\text{أ}}^{\text{أ}}$ ق(س).د س

ونقول عندها أن التكامل المعتل ل يكون متقارباً إذا كانت النهاية $\lim_{\text{أ} \to \infty} \int_{\text{أ}}^{\text{أ}}$ ق(س).د س موجودة أما إذا لم تكن موجودة أو كانت لا نهائية عندئذ نقول أن التكامل المعتل ل غير موجود أو متباعد.

المفهوم الهندسي للتكامل المعتل من النوع الأول:

يعطينا تعريف التكامل المعتل من النوع الأول تعبيراً بأنه المساحة التي يحصرها التابع ق(س) مع المحور س حتى اللانهاية.



قاعدة نيوتن – لا يبنتيز: إذا وجد للتابع ق تابعاً أصلياً ق عندئذ يمكن الكتابة

$\int_{أ}^{\infty} ق(س).دس = \lim_{س\to\infty} \left[ق(س) - ق(أ)\right]_{أ}^{أ}$ ومن الملاحظ أن قيمة ق(أ) لن تؤثر في تقارب التكامل.

مثال:

احسب التكامل $ل = \int_{0}^{\infty} \frac{د س}{1+س^{2}}$

الحل:

$ل = \int_{0}^{\infty} \frac{د س}{1+س^{2}} = [\text{قوس ظا س}]_{0}^{\infty} = \lim_{س\to\infty}$ قوس ظاس – قوس ظا ٠ = $\frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

مثال:

ادرس تقارب التكامل $ل = \int_{1}^{\infty} \frac{د س}{س^{\lambda}}$ وذلك حسب قيم λ.

أولاً: في حالة $\lambda = 1$ نجد أن $ل = \int_{1}^{\infty} \frac{دس}{س} = [\text{لو} س]_{1}^{\infty} =$

$\lim_{س\to\infty}$ لو$_{e}$ س – لو$_{e}$ ١ النهاية الأخيرة غير موجودة وبالتالي فالتكامل متباعد.

ثانياً: في حالة $\lambda \neq 1$ عندئذ فإن $ل = \int_{1}^{\infty} \frac{د س}{س^{\lambda}} = \left[\frac{س^{1-\lambda}}{1-\lambda}\right]_{1}^{\infty}$

$= \lim_{س\to\infty} \frac{س^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}$ الأن من أجل النهاية في الطرف الأيمن نجد أن إذا

كان $١-\lambda < ٠ \Longleftarrow \lambda > ١ \Longleftarrow \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \text{س}^{١-\lambda} = ٠$ ويصبح التكامل موجوداً ومتقارباً.

أما إذا كان $١-\lambda > ٠ \Longleftarrow \lambda < ١ \Longleftarrow \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \text{س}^{١-\lambda}$. وبالتالي يصبح التكامل متباعداً.

خلاصة:

يكون التكامل $\text{ل} = \int_{١}^{\infty} \frac{\text{د س}}{\text{س}^{\lambda}}$ موجوداً ومتقارباً عندما تكون $\lambda > ١$ ويسمى هذا التكامل "تكامل ريمان"

وفي عدا هذه الحالة يكون هذا التكامل متباعداً.

مثال:

ادرس تقارب التكامل $\text{ل} = \int_{٠}^{\infty} \text{جتا س.د س}$

$\text{ل} = \int_{٠}^{\infty} \text{جتا س.د س} = \left[-\text{جاس}\right]_{٠}^{\infty} = \lim\limits_{\text{س}\to\infty} \text{جا س}$ والنهاية في الطرف الأيمن غير موجودة. وبالتالي فإن التكامل المعتل غير موجود.

ملاحظة:

يمكن رد دراسة تقارب التكامل المعتل من النوع الأول إلى دراسة التابع الموجود في النهاية حسب تعريف التكامل المعتل $\int_{أ}^{\infty} \text{ق(س). دس} = \lim\limits_{ا\to\infty} \int_{أ}^{ا} \text{ق(س).د س}$

ولذلك فإننا لن نستغرب إذا رأينا معاييراً مماثلة لمعايير تقارب التوابع.

ملاحظة آخرى:

إن الحد الأدنى من التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty}\text{ق}(\text{س})$. دس لا يؤثر في تقاربه وذلك لأن التكامل يكون موجوداً إذا وجدت النهاية $\lim_{\text{ا}\to\infty}\bar{\text{ق}}(\text{س})$ حسب نيوتن – لايبنتيز

تعميم:

يمكن إدراك نفس التعريف من أجل التكامل ل بالشكل: ل= $\int_{-\infty}^{\text{ب}}\text{ق}(\text{س})$. دس= $\lim_{\text{أ}\to-\infty}\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}\text{ق}(\text{س})$.د س ونكتب من أجله دستور نيوتن – لاينبتير. بالشكل: ل: $\int_{-\infty}^{\text{ب}}\text{ق}(\text{س})$.د س $=\bar{\text{ق}}(\text{ب})-\lim_{\text{أ}\to-\infty}\bar{\text{ق}}(\text{أ}')$

وأيضاً من أجل التكامل ك = $\int_{-\infty}^{\infty}\text{ق}(\text{س})$. دس ويمكن كتابته بالشكل:

ك = $\int_{-\infty}^{\infty}\text{ق}(\text{س})$. دس = $\lim_{\substack{\text{أ}\to\infty\\ \text{أ}'\to-\infty}}\int_{\text{أ}'}^{\text{أ}}\text{ق}(\text{س})$. دس

ويمكن كتابة دستور نيوتن – لايبنتيز بالشكل:

ك = $\int_{-\infty}^{\infty}\text{ق}(\text{س})$. دس = $\lim_{\text{أ}\to\infty}\bar{\text{ق}}(\text{أ})-\lim_{\text{أ}'\to-\infty}\bar{\text{ق}}(\text{أ}')$

تبديل المتحول في التكامل المعتل من النوع الأول:

إذا كان لدينا $\int_{\text{أ}}^{\infty}\text{ق}(\text{س})$. دس وفرضنا س = $\psi(\text{ت})$ عندئذ دس= $\psi'(\text{ت})$

ويمكن عندها كتابة التكامل بالشكل:

$$ل = \int_{\psi^{-1}(أ)}^{نهـا_{س \to ب} \psi^{-1}(س)} ق(\psi(ت)).\psi'(ت) . دت$$

مثال: احسب التكامل $\int_{0}^{\infty} \frac{دس}{(2س - 3)^2}$

الحل:

الآن لنفــــرض أن $ت = 2س - 3 \Longrightarrow دت = 2 . دس \Longrightarrow دس = \frac{دت}{2}$

وبتغيير حدود التكامل نجد أن:

$$س = 0 \Longrightarrow ت = -3$$

$$س = \infty \Longrightarrow ت = نهـا_{س \to \infty} 2س - 3 = \infty$$

وعندئذ يصبح التكامل

$$ل = \int_{-3}^{\infty} \frac{دت}{2ت^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{ت}\right]_{-3}^{\infty} = \frac{1}{2}\left[نهـا_{ت \to \infty} \frac{-1}{ت} + \frac{1}{-3}\right] = \frac{1}{2} . \left[0 - \frac{1}{3}\right] = \frac{-1}{6}$$

ملاحظة:

بعض التكاملات المعتلة من النوع الأول لتصبح تكاملات غير معتلة لدى إجراء تبديلاً للمتحول فيها.

مثال:

بملاحظة التكامل $ل = \int_{2}^{\infty} \frac{دس}{\sqrt{(س^2 - 2)}\,(س^2 - 1)}$. الآن بإجراء تبديلاً للمتحول بالشكل $س = \frac{1}{ت}$ نجد أن $دس = \frac{-دت}{ت^2}$ وتصبح حدود التكامل $س = 2 \Longrightarrow ت = + \frac{1}{2}$

$\text{س} = \infty \Longrightarrow \text{ت} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{١}{\text{س}} = ٠$ وبالتالي يصبح التكامل

$$\text{ل} = \int_{١/٢}^{٠} \frac{-\text{دت}}{\frac{\text{ت}^٢}{\text{ت}} \sqrt{\left(\left(\frac{١}{\text{ت}}\right)^٢ - ٢\right)\left(\left(\frac{١}{\text{ت}}\right)^٢ - ١\right)}}$$

$$= \int_{٠}^{١/٢} \frac{\text{دت}}{\frac{\text{ت}^٢}{\text{ت}} \sqrt{(١-٢\text{ت}^٢)(١-\text{ت}^٢)}} = \int_{١/٢} \frac{\text{دت}}{\sqrt{(١-٢\text{ت}^٢)(١-\text{ت}^٢)}}$$ تكاملاً غير معتل.

طريقة التجزئة في التكامل المعتل من النوع الأول:

إن دستور التكامل بالتجزئة يمكن أن يكتب بالشكل =

$$\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع.دف} = \left[\text{ع.ف}\right]_{\text{أ}}^{\infty} - \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ف.دع} = \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}}\, \text{ع.ف(س)} - \text{ع.ف(أ)} - \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ف.دع}$$

مثال:

احسب التكامل $\text{ل} = \int_{٠}^{\infty} \text{س هـ}^{-\text{س}}.\ \text{دس}$

الآن لنطبق دستور التجزئة وذلك باختبار

$\text{ع} = \text{س} \qquad \text{دف} = \text{هـ}^{-\text{س}}.\ \text{دس}$

$\text{دع} = \text{دس} \qquad \text{ف} = -\text{هـ}^{-\text{س}}$

$$\Longrightarrow \text{ل} = -\left[\text{س هـ}^{-\text{س}}\right]_{٠}^{\infty} + \int_{٠}^{\infty} \text{هـ}^{-\text{س}}.\ \text{دس}$$

$$= -\left[\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{\text{س}}} - ٠\right] + \left[\frac{\text{هـ}^{-\text{س}}}{-١}\right]_{٠}^{\infty} = ٠ + \underset{\text{س}\to\infty}{\text{نهـا}} -\text{هـ}^{-\text{س}} + \text{هـ}^{٠} = ٠ + ١ = ١$$

خواص التكامل المعتل من النوع الأول:

في الواقع باعتباره حالة خاصة من التكامل المحدد يمكن أن نورد الخواص التالية:

١. $\int_{\text{أ}}^{\infty} \alpha . \text{ق}(\text{س}) . \text{دس} = \alpha \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس}$

٢. $\int_{\text{أ}}^{\infty} \left(\text{ق}(\text{س}) \mp \text{ع}(\text{س})\right) . \text{دس} = \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}) \text{دس} \mp \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع}(\text{س}) . \text{دس}$

٣. $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس} \leq \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع}(\text{س}) . \text{دس}$ إذا كان $\text{ق} \leq \text{ع}$

٤. $\left| \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس} \right| \leq \int_{\text{أ}}^{\infty} \left| \text{ق}(\text{س}) \right| . \text{دس}$

معايير تقارب التكاملات المعتلة من النوع الأول:

أ. مبرهنة الشرط اللازم:

إذا كان التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس}$ موجوداً ومتقارباً فإن $\lim_{\text{س} \to \infty} \text{ق}(\text{س}) = 0$.

ب. شرط كوشي لتقارب التكامل المعتل من النوع الأول:

إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس}$ موجوداً ومتقارباً هو أن يكون

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists\, \text{أ}(\varepsilon) ، \text{أ}_1 , \text{أ}_2 > \text{أ}(\varepsilon) \Longrightarrow \left| \int_{\text{أ}}^{\text{أ}_1} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس} - \int_{\text{أ}}^{\text{أ}_2} \text{ق}(\text{س}) . \text{دس} \right| < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \left|\int_{أ_{٢}}^{أ_{١}} ق(س).دس\right| < \varepsilon .$$

في الواقع أن التطبيقات العملية لشرط كوشي تكون معقدة في غالب الأمر لذلك يفضل استخدام معيار 'شرط كوشي' في المبرهنات فقط أما في حل المسائل فسندرس معايير أكثر سهولة وأقل طولاً.

يمكن في الواقع تقسيم معايير تقارب التكاملات المعتلة إلى صنفين وفق إشارة ق(س).

أ. التكاملات المعتلفة من النوع الأول الموجبة:

تعريف: نقول أن التكامل المعتل ل = $\int_{أ}^{\infty}$ق(س). دس إذا كان ق(س) $\geq$ ٠

١. المعيار الأول:

في الواقع إذا أخذنا التكامل المحدد التالي Ψ(س)= $\int_{أ}^{س}$ق(س). دس عندئذ فإن التابع Ψ(س) متزايداً كون ق(س) > ٠ وبالتالي فإن هذا التابع يملك نهاية عندما س ⟵ ∞ إذا كان محدوداً من الأعلى. ويمكن تلخيص المعيار بالشكل:

يكون التكامل ل= $\int_{أ}^{\infty}$ق(س). دس موجوداً إذا كان التابع Ψ(س)= $\int_{أ}^{س}$ق(س). دس محدوداً من الأعلى.

مثال:

برهن على وجود التكامل ل = $\int_{أ}^{\infty}\frac{دس}{س^{٢}}$

سنلاحظ أن $\psi(\text{س}) = \int_{\text{أ}}^{\infty} \frac{\text{دس}}{\text{س}^{2}} = \frac{1}{\text{أ}} - \frac{1}{\text{س}}$ وبملاحظة أن $\psi(\text{س}) < \frac{1}{\text{أ}}$ عندئذ فإن التكامل ل موجود بالتقارب.

٢. معايير المقارنة:

أ. إذا كان $0 \leq \text{ق}(\text{س}) \leq \text{ع}(\text{س})$ عندئذ فإن تقارب التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}).\text{دس}$ يؤدي إلى تقارب التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}).\text{دس}$ وتباعد التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}).\text{دس}$ يؤدي إلى تباعد التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع}(\text{س}).\text{دس}$

البرهان:

في الواقع باستخدام الخاصية – ٣ – في التكامل المحدد نجد أن: $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}).\text{دس} \leq \int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع}(\text{س}).\text{دس}$ عندئذ فإن:

$$0 \leq \lim_{\text{ا}\to\infty} \int_{\text{أ}}^{\text{ا}} \text{ق}(\text{س}).\text{دس} \leq \lim_{\text{ا}\to\infty} \int_{\text{أ}}^{\text{ا}} \text{ع}(\text{س}).\text{دس}$$

١. إذا كانت النهاية اليمنى موجودة فإنه وحسب خواص النهايات تكون النهاية اليسرى موجودة وهذا ما نعبّر عنه بالكتابة.

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع}(\text{س}).\text{دس}$ متقارباً فإن $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}).\text{دس}$ متقارباً.

٢. إذا كانت النهاية اليسرى غير موجودة فإنه وحسب خواص النهايات تكون النهاية اليمنى غير موجودة وهذا ما نعبر عنه بالكتابة.

إذا كان $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ق}(\text{س}).\text{دس}$ متباعداً فإن $\int_{\text{أ}}^{\infty} \text{ع}(\text{س}).\text{دس}$ يكون متباعداً أيضاً.

ب. إذا كان لدينا $ع(س) \geq ق(س) \geq م.ع(س) \quad ٠ \geq م$ عندئذٍ فإن التكـاملات $\int_{أ}^{\infty} ق(س).دس$ و $\int_{أ}^{\infty} ع(س).دس$ من نوع واحد من حيث التقارب والتباعد.

البرهان:

يتم برهان هذه القضية إذا استخدمنا معيار المقارنة – أ – بالشكل الأول.

أولاً:

بـالنظر إلى $م.ع(س) \leq ق(س)$، فـإذا كانـت $\int_{أ}^{\infty} ع(س).د\,س$ متقاربـاً فـإن $\int_{أ}^{\infty} ق(س).د\,س$ متقارباً وإثبات التباعد ويتم بنفس الطريقة وبالتالي نستطيع الكتابة أنه:

يكون $\int_{أ}^{\infty} ع(س).د\,س$ متقارباً إذا وفقط إذا كان $\int_{أ}^{\infty} ق(س).د\,س$ متقارباً.

وبالتالي $\int_{أ}^{\infty} ع(س).د\,س$ و $\int_{أ}^{\infty} ق(س).د\,س$ من نوع واحد.

جـ. إذا كان ق (س) و ع(س) تابعين موجبين بحيث أن $\lim_{س\to\infty} \frac{ق(س)}{ع(س)} = ل$

$$\Longleftarrow \forall\, \varepsilon > ٠ : E\,\delta\,(\varepsilon) : |س| > \delta\,(ع) \Longleftarrow \left|\frac{ق(س)}{ع(س)} - ل\right| < ع$$

$$\Longleftarrow -\varepsilon < \frac{ق(س)}{ع(س)} - ل < \varepsilon \Longleftarrow ل - ع \leq \frac{ق(س)}{ع(س)} \leq ل + \varepsilon$$

وباختبار $م = ل + \varepsilon$ و $م = ل - \varepsilon$ نجد أن:

$$م \leq \frac{ق(س)}{ق(س)} \leq م \Longleftarrow م\,ع\,(س) \leq ق(س) \leq م\,ع(س)$$

ونحـــن عندئـــذ أمـــام معيـــار المقارنـــة – ب – وبالتـــالي $\int_{أ}^{\infty} ق(س).د\,س$ و $\int_{أ}^{\infty} ع(س).د\,س$ من نوع واحد.

مثال:

ادرس تقارب كلاً من التكاملات التالية:

١. $\int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{س^{٣}}$ من أجل $أ > ١$ ٢. $\int_{أ}^{\infty} \frac{س^{٢}+١}{س^{٤}+١}.دس$ من أجل $أ > ١$

٣. $\int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{\sqrt{س}}$ من أجل $أ > ١$

الحل:

١. من أجل $ل = \int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{س^{٣}}$ سنلاحظ أن $٠ < \frac{١}{س^{٣}} < \frac{١}{س^{٢}}$

ونعلم أن $\int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{س}$. متقارباً عندئذ وحسب معيار المقارنة الأول – أ – نجد أن $\int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{س^{٣}}$ متقارباً وموجوداً.

٢. $\int_{أ}^{\infty} \frac{س^{٢}+١}{س^{٤}+١}.دس$ بملاحظـة أن $\frac{١}{س^{٢}} \leq \frac{س^{٢}+١}{س^{٤}+١} \leq \frac{٢}{س^{٢}}$ ونعلـم أن التكامـل $\int_{أ}^{\infty} \frac{١}{س^{٢}}.دس$ متقارباً عندئذ وحسب معيـار المقارنـة – ب – نجـد أن التكـاملين $\int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{س^{٢}}$ و $\int_{أ}^{\infty} \frac{س^{٢}+١}{س^{٤}+١}.دس$ من نوع واحد. $\Longleftarrow \int_{أ}^{\infty} \frac{س^{٢}+١}{س^{٤}+١}.دس$ متقارباً.

٣. بملاحظة أنه من أجل $\int_{أ}^{\infty} \frac{د\,س}{\sqrt{س}}$ إذا استخدمنا معيار المقارنة – جـ – ولاحظنا

أن التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty}\frac{\text{د س}}{\text{س}^{2}}$ متقارباً نجد أن $\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\frac{1/\text{س}^{2}}{1/\sqrt{\text{س}}}=\lim\limits_{\text{س}\to\infty}\frac{1}{\text{س}^{3/2}}=0$ وبالتالي التكاملين $\int_{\text{أ}}^{\infty}\frac{\text{د س}}{\text{س}^{2}}$ و $\int_{\text{أ}}^{\infty}\frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}}}$ ليسا من نوع واحد وبالتالي فإن $\int_{\text{أ}}^{\infty}\frac{\text{د س}}{\sqrt{\text{س}}}$ متباعد.

تعريف التقارب بالإطلاق:

تعريف: نقول عن التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty}\text{ق(س). دس}$ أنه متقارب بالإطلاق إذا كان التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty}|\text{ق(س)}|\text{. دس}$ متقارباً

مبرهنة: إذا كان التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty}|\text{ق(س)}|\text{. دس}$ متقارباً فإن $\int_{\text{أ}}^{\infty}\text{ق(س). (دس)}$ يكون متقارباً.

البرهان:

أولاً بكتابة شرط كوشي من أجل التكامل $\int_{\text{أ}}^{\infty}|\text{ق(س)}|\text{. دس}$ نجد أن

$\forall\,\varepsilon>0 : E\ \text{أ}(\varepsilon)\ \text{أ}_1،\text{أ}_2>\text{أ}(\varepsilon)\Longrightarrow\left|\int_{\text{أ}_1}^{\text{أ}_2}|\text{ق(س)}|\text{.د س}\right|<\varepsilon$ وبملاحظة أن $\left|\int_{\text{أ}_1}^{\text{أ}_2}\text{ق(س).د س}\right|\le\left|\int_{\text{أ}_1}^{\text{أ}_2}|\text{ق(س)}|\text{.د س}\right|<\varepsilon$

وبالتالي نجد أن شرط كوشي محققاً من أجل $\int_{\text{أ}}^{\infty}\text{ق(س). دس}$ وبالتالي فهو متقارب.

ملاحظة: عندما يكون $\int_{أ}^{\infty}$ ق(س). دس متقارباً ونجد أن $\int_{أ}^{\infty}$|ق(س)|. دس متباعداً عندئذ نقول أن تقارب التكامل $\int_{أ}^{\infty}$ ق(س). دس هو تقارب شرطي.

ب. التكاملات المعتلة ذات الإشارة الكيفية:

تعريف: نقول عن التكامل المعتل ل = $\int_{أ}^{\infty}$ ق(س). دس أنه ذو إشارة كيفية إذا كانت إشارة التابع ق(س) لا تملك انتظاماً.

من أجل هذه التكاملات لدينا معيار يعتمد على مفهوم التقارب بالإطلاق.

فإذا كنا امام التكامل المعتل ذو الإشارة كيفية ل = $\int_{أ}^{\infty}$ ق(س). دس فسندرس تكامل القيمة المطلقة الخاص به ل= $\int_{أ}^{\infty}$|ق(س)|. دس والأخيرة هو تكامل ذو إشارة موجبة فإذا كان ل متقارباً عندئذ نجزم أن ل متقارباً.

أما إذا كان ل متباعداً عندها لا يمكننا الجزم بشيء.