# الهندسة العملية

## الجزء الأول

فى

الهندسة الفراغية ، الهندسة الوصفية

تأليف


المهندس

توفيق قسطندى

الحاصل على دبلوم فى الهندسة المدنية والمدرس المساعد بمدرسة الهندسة سابقا
ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية حالا

،

المهندس

كامل المصرى

الحاصل على دبلوم فى الهندسة
ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية





سنة ١٣٤٧ هـ — ١٩٢٨ م

المطبعة الحديثة بشارع خيرت بالقاهرة

# الهندسة العملية

## الجزء الأول

في

الهندسة الفراغية و الهندسة الوصفية

تأليف


المهندس

توفيق قسطندي

الحاصل على دبلوم في الهندسة المدنية والمدرس المساعد بمدرسة الهندسة سابقا

ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية حالا

و

المهندس

كامل المصري

الحاصل على دبلوم في الهندسة

ومدرس بمدرسة الفنون والصناعات الملكية





سنة ١٣٤٧ هـ — ١٩٢٨ م

المطبعة الحديثة بشارع خيرت بالقاهرة

# المقدمة

لما بدأت تدريس مادة الهندسة الوصفية بمدرسة الفنون والصناعات الملكية شعرت بحاجة الطلبة الى مذكرات مطبوعة فى هذه المادة وفعلا طبعت لهم المذكرات اللازمة سنة ١٩٢٦ واخيرا فكرت مع زميلى حضرة كامل المصرى افندى فى وضع هـذه المذكرات على شكل كتاب لعدم وجود كتب حديثة فى هذه المادة باللغة العربية .

وتسهيلا لدراسة هذه المادة للطلبة اللذين لم يدرسوا الهندسة الفراغية من قبـل بدأنا الـكتاب بالنظريات اللازمة فى الهندسة الفراغية وعنينا بوضع حل كثير من التمرينات فى لوح يستعين بها الطالب فى بدء دراسته

وعنيت بالتوسع فى باب الانفرادات على شكل خاص حتى يستعين بها طلبة المدارس الصناعية وخصوصا قسم السمكرة منها

ولقد كان لمعونة حضرة المهندس كامل المصرى افندى فى وضع الابواب السبعة الاولى اكبر معضد لى واسفت كثيرا لنقله لمدرسة شبين الـكوم الزراعية لان ذلك حرمنى من تعضيده الثمين فى تجهيز باقى ابواب الـكتاب م؟

توفيق قسطندى

# الفهرست

## الهندسة الفراغية

# الفصل الاول

## فى الخط المستقيم والمستوى

١ — تعاريف :

**الجسم المادى** : هو كل ما يشغل حيزا محدودا من الفراغ وله طول وعرض وسمك ومقدار الحيز الذى يشغله الجسم يسمى « حجمه »

**السطح** : هو الحد الذى يفصل الجسم عما يحيطه من الفراغ وله طول وعرض فقط

**الخط** : هو مايحد السطح وله طول فقط

**النقطة** : هى نهاية الخط أو محل تقاطعه بخط آخر وليس لها عرض ولا سمك

**الشكل** : يطلق لفظ «شكل» على كل مجموعة من النقط والخطوط والسطوح

**المستوى** : هو ابسط السطوح وهو السطح الذى اذا انتخبت فيه نقطتان أياً كانتا واتصلتا بمستقيم كان هذا المستقيم وامتداده واقعين بأكمله فى هذا السطح

وعلى ذلك يستنتج انه اذا احتوى اى مستو على نقطتين فانه يحتوى على جميع نقط الخط المستقيم الواصل بين هذين النقطتين وامتداده والمستوى فى الاعتبار الهندسى غير محدود وانما يمثل عادة بشكل محدود وعلى شكل مستطيل

**الخط الرأسى** : الخط الرأسى فى أى مكان هو الاتجاه الذى يأخذه خيط الشاغول فى ذلك المكان وكل المستويات التى تحتوى على مثل هذا الخط رأسيه

**المستوى الافقى** : فى أى مكان هو ما كان موازيا لسطح الماء الراكد عند ذلك المكان وكل الخطوط المحتوى عليها المستوى الافقى افقيه

٢ — **أوضاع المستقيم بالنسبة الى المستوى** : يستنتج من تعريف المستوى ان المستقيم : —

اولا — أما أن يقابل المستوى فى نقطتين و يقال انه واقع بتمامه فيه

ثانيا — واما أن يقابله فى نقطة واحدة و يقال انه قطعه

ثالثا — واما الاّ يقابله و يقال انه موازٍ له

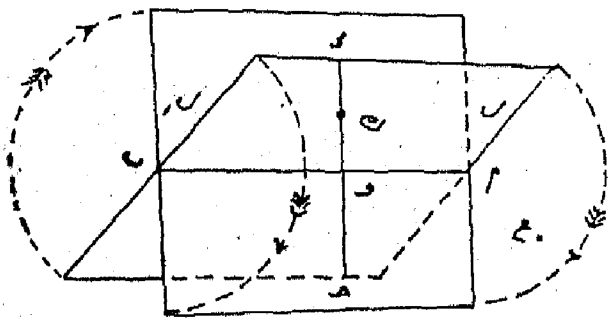
وفى الحالة الثانية أما أن يكون المستقيم عمودا على كل مستقيم يلاقيه فى المستوى و يسمى المستقيم عمودا على المستوى أو المستوى عموداً عليه وأما الاّ يكون المستقيم عمودا على كل مستقيم يلاقيه فى المستوى و يسمى مائلا عليه

**ملاحظة** : فى الهندسة المستوية يدور البحث عن أشكال فى مستو واحد . أمّا اذا كان الكلام على الأشكال فى مستويات مختلفة فى الفراغ فيدخل هذا البحث فى الهندسة الفراغية

**النظرية الاولى** : كل مستقيمين متقاطعين يقعان فى مستوٍ واحد ولا يوجدان فى سواه

**المفروض** : المستقيمان المتقاطعان ا ب ، حـ ء فى نقطة و كما فى شكل (١)

**العمل** : خذ أى نقطة مثل ك على المستقيم حـ ء وافرض



شكل (١)

أن المستوى ل الذى يحتوى على المستقيم ا ب قد دار حول المستقيم ا ب كمحور حتى قابل النقطة ك واخذ الوضع ل،

**البرهان**: النقطتان ك ، و فى المستوى ل، فيكون المستقيم حـ ولـ ء المحتوى عليهما واقعا بتمامه فى ذلك المستوى

واذا فرضت بعد ذلك أية نقطة خارجة عن المستوى ل، مثل النقطة ع

فلــكى يحتوى ل، على النقطة الجديدة ع لا بد من استمرار دورانه حول ا ب وبذلك يبعد عن النقطة ك فلا يمكن احتوائه عليها ولا على المستقيم حـ و ك ء

∴ لابد أن يكون هناك وضع واحد مثل الوضع ل، لهذا المستوى لـكى يحتوي على الخطين ا ب ، حـ ء وهو المطلوب

نتيجة : يستنتج من النظرية السابقة أن المستوى انمــا يتعين باحــدى الاحوال الآتية

اولا — امّا بمستقيمين متقاطعين

ثانيا — اما بمستقيم ونقطة خارجة عنه

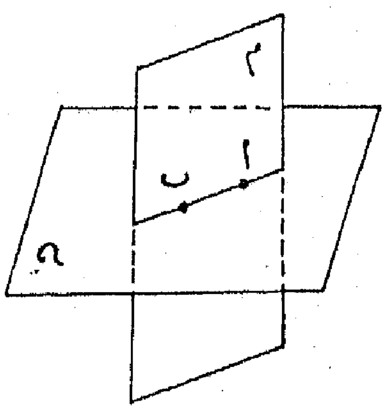
ثالثا — اما بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

رابعا — اما بمستقيمين متوازيين

النظرية الثانية : اذا قطع مستوى مستويا آخر فانهما يتقاطعان فى خط مستقيم

المفروض : المستويان المتقاطعان م ، ن ( شكل ٢ )

العمل : لتكن نقطة ا هى نقطة مشتركة بين المستويين م ، ن ونقطة ب هى اى نقطة أخرى مشتركة بينهما أيضا فاذا وصلنا النقطتين ا ، ب بخط مستقيم يقع هذا الخط وامتداده بتمامه فى كل من المستويين م ، ن




( شكل ٢ )

∴ المستقيم ا ب مشترك بين المستويين أو بمعنى آخر هو خط تقاطعهما ولا يمكن اشتراكهما معا فى خط منحنى أو منكسر لانه اذا احتوى أحدهما على ذلك الخط المنحنى او المنكسر لا يمكن احتواء الآخر عليه بسبب الاستواء وهو المطلوب

نتيجة ١ : يتقاطع الثلاث مستويات معا فى نقطة واحدة لأن كل اثنين منها

يتقاطعان فى خط مستقيم وان الثلاث خطوط التى تنشأ من تقاطع كل مع الآخر على التوالى لايمكن تقابلها فى أكثر من نقطة واحدة الا اذا انطبقت على بعضها

وهناك حالة خاصة يتقاطع فيها كل اثنين من الثلاث مستويات فى خط مستقيم وعندئذ يتقاطع الثلاث مستويات فى ثلاث خطوط مستقيمة متوازية

**نتيجة ٢** : أن المستويين : —

أولا — اما ألاّ يشتركا فى نقطة ما و يقال أنهما متوازيان

ثانيا — واما أن يشتركا فى نقطتين و يقال أنهما متقاطعان

ثالثا — واما أن يشتركا فى ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة و يقال أنهما منطبقان

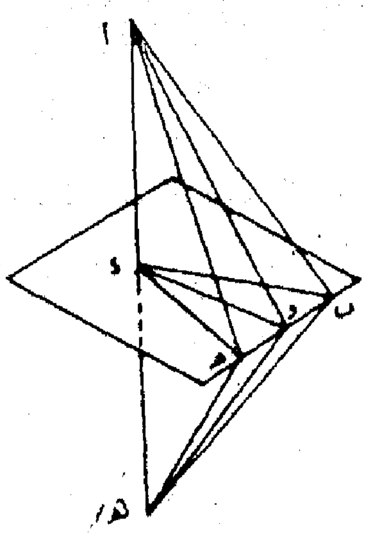
**النظرية الثالثة** : اذا تعامد خط مستقيم على كل من مستقيمين متقاطعين فى نقطة تقاطعهما كان عمودا على مستويهما

**المفروض** : المستقيم ا ء المتعامد على كل من المستقيمين ء ب ٯ ء حـ عند نقطة تقاطعهما ء

**المطلوب اثباته** : أن ا ء عمود على المستوى ب ء حـ ( شكل ٣ )

**العمل** : مد ا ء على استقامته الى هـ بحيث يكون ا ء = ء هـ ثم خذ نقطة مثل و على المستقيم الواصل من ب الى حـ ثم وصل من ب ٯ حـ ٯ و الى ء

**البرهان** : حيث أن نقطتى و ٯ ء فى المستوى ء ب حـ يكون الخط و ء فى المستوى ء ب حـ



شكل (٣)

وفى المثلثين ا ء ب ٯ هـ ء ب

ا ء = ء هـ بالعمل ٯ ب ء مشترك

ٯ الزاوية ا ء ب = ب ء هـ بالقيام

∴ ا ب = ب هـ

وبالمثل فى المثلثين ا ب ء ، ب ء هـ يكون ا حـ = حـ هـ

∴ △ ا ب حـ = △ هـ ب حـ لان كل ضلع منهما يساوى نظيره فى الآخر

فاذا دار المثلث ا ب حـ حول القاعدة المشتركة ب حـ حتى انطبقت نقطة الرأس ا على نظيرتها هـ وكذلك انطبق الضلع هـ و على نظيره ا و يكون : —

∴ △ ا و ء = △ هـ و ء .

، الزاوية ا ء و = و ء هـ = ق

∴ ا ء عمود على ء و

وبالمثل يمكن البرهنة على ان ا ء عمود على اى مستقيم مثل ء و فى المستوى ء ب حـ وهو المطلوب

النظرية الرابعة : اذا تعامد مستقيم على كل من ثلاث مستقيمات متقابلة فى نقطة واحدة عند نقطة تقابلهما كانت الثلاث مستقيمات فى مستو واحد

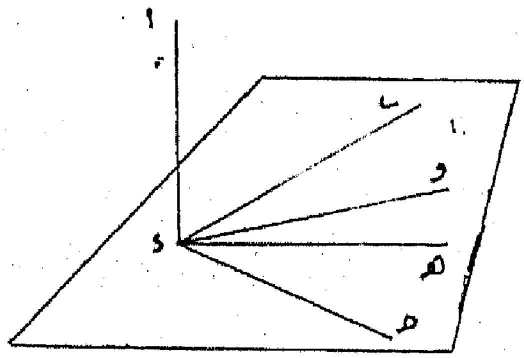
المفروض — المستقيم ا ء عمود على كل من الثلاث مستقيمات ء ب ، ء و ، ء حـ عند نقطة تلاقيها ء وان المستوى ا ء و يقطع المستوى ا ء حـ فى خط مستقيم مثل ء هـ ( شكل ٤ )

البرهان : بما ان الخط ا ء عمود على كل من ء ب ، ء هـ فيكون عمودا على ء هـ لانه واقع فى كل من المستويين ا ء و ، ا ء حـ

∴ الزاوية ا ء هـ قائمة وتساوى الزاوية ا ء و

ولكن هذا مستحيل إلاّ اذا كان ء و ، ء هـ منطبقان

∴ ء و واقع فى المستوى ب ء حـ وهو المطلوب



شكل ( ٤ )

نتيجة :

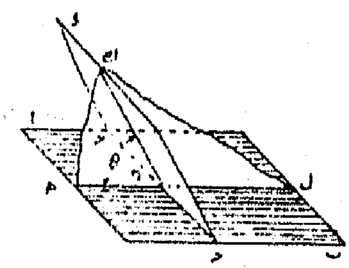
أولا ــ اذا تعامد مستقيم على كل من مستقيمين متقابلين تعامد على كل خط يلاقيه فى مستويهما

ثانيا ــ ان كل مجموعة من المستقيمات المتعامدة على مستقيم واحد فى نقطة واحدة تسكون فى مستو واحد

ثالثا ــ لا يمكن اقامة الا عمودا واحدا على مستوى معلوم من نقطة معلومة فيه

رابعا ــ لا يمكن انزال الا عمودا واحدا على مستوى معلوم من نقطة معلومة خارجة عنه

٣ ــ **تعريف الزاوية الزوجية** : الزاوية الزوجية هى الزاوية بين مستويين متقاطعين وتقاس بالزاوية الواقعة بين عمودين مقامين على خط تقاطعهما من أى نقطة فيه بحيث يكون أحد العمودين فى مستو منهما والثانى فى المستو الآخر على التوالى (شكل ٥ )



(شكل ٥)

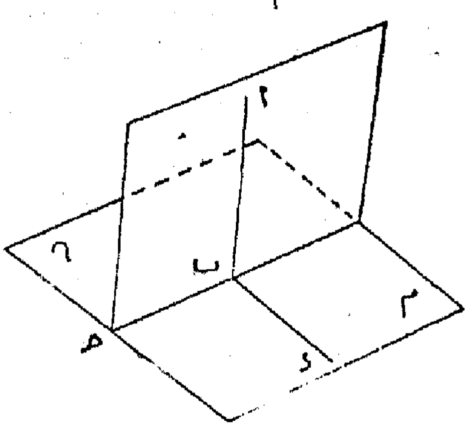
فمن الشكل نرى أن المستويين ء حـ ى ، ا ب متقاطعان وتسكون الزاوية الزوجية بينهما هى الزاوية المحصورة بين المستقيمين ى ك ، ى هـ المرسومين من النقطة ى على خط التقاطع حـ حـ وعموديين عليه فى تلك النقطة

٤ ــ **المستويان المتوازيان** : المستويان المتوازيان هما المستويان اللذان لا يمكن تقابلهما مهما امتدا

**النظرية الخامسة** : كل مستو يحتوى على خط مستقيم عمود على مستو آخر يكون عموديا على ذلك المستوى

**المفروض** : أن المستقيم ا ب عمود على المستوى م ى ( شكل ٦ )

**والمطلوب اثباته** : ان أى مستو مثل ا ب حـ الذى يحتوى على الخط ا ب يكون عموديا على المستوى م ى



( شكل ٦ )

**العمل** : نرسم الخط ب ى فى المستوى م ن عمودا على ب حـ خط تقاطع المستويين

**البرهان** : بما أن المستقيم ا ب عمود على المستوى م ن فيكون عمودا على كل من حـ ب ، ب ى ولكن الزاوية بين المستويين تقاس بالزاوية ا ب ى كما تقدم وهى قائمة

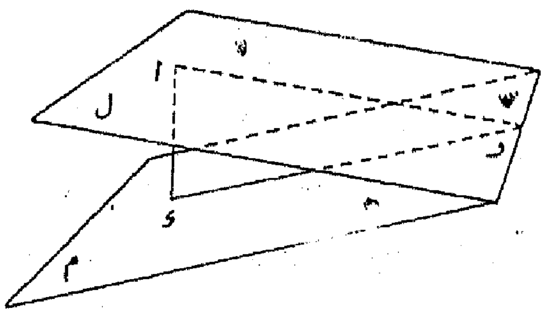
∴ المستوى ا ب حـ عمود على المستوى م ن وهو المطلوب

**نتيجة** : اذا تعامد مستويان على بعضهما كان كل مستقيم فى احدهما عمود على خط تقاطعهما عمودا على المستوى الآخر

**النظرية السادسة** : المستويات المتعامد عليها مستقيم واحد متوازيه

**المفروض** : المستقيم ا ى عمود على كل من المستويين ل ، م عند النقطتين ا ، ى على التوالى (شكل ٧)

**المطلوب اثباته** : المستويان ل ، م متوازيان



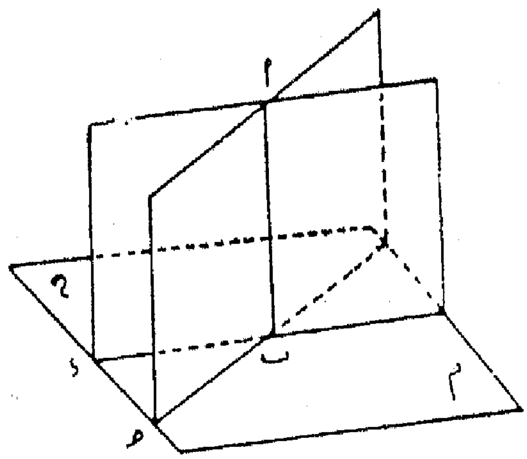

( شكل ٧ )

**البرهان** . اذا فرض وأمكن امتداد المستويين الى أن يتقابلا فيكون تقابلهما فى خط مستقيم فاذا انتخبت أى نقطة مثل و على خط تقاطعهما هذا ووصل بينها وبين كل من النقطتين ا ، ى بالمستقيمين و ا ، و ى لحدث المثلث ا و ى وفيه كل من الزاويتين و ا ى ، و ى ا قائمة وهذا مستحيل

∴ لا يمكن تقابل المستويين ل ، م فيكونان متوازيين وهو المطلوب

**نتيجة** : اذا تعامد مستويان على بعضهما كان كل مستقيم فى احدهما عمود على خط تقاطعهما عمودا على الآخر

**النظرية السابعة** : اذا تعامد مستويان متقاطعـان على مستو ثالث كان خط تقاطعهما عمودا على المستوى الثالث




( شكل ٨ )

**المفروض**: المستويان ا حـ ، ا ء المتقاطعان فى ا ب المتعامدان على المستوى م ع ( شكل ٨ )

**المطلوب اثباته** : ان خط تقاطعهما ا ب عمود على المستوى م ع

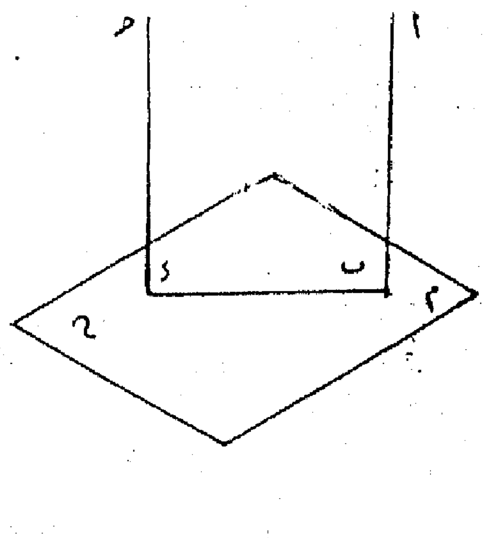
**البرهان** : ليكن ب حـ ، ب ء هما خطا تقاطع كل من المستويين ا حـ ، ا ء بالمستوى م ع

فالخط المرسوم من ب عمودا على المستوى م ع لابد وأن يقع فى المستوى ا حـ العمودى على م ع ( نتيجة النظرية الخامسة )

وكذا لابد وان يقع فى المستوى ا ء للسبب نفسه

∴ ا ب الموجود فى كل من المستويين أو بمعنى آخر خط تقاطعهما عمود على المستوى م ع عند النقطة ب وهو المطلوب

**النظرية الثامنة** : كل خطين متعامدين على مستو واحد متوازيان




( شكل ٩ )

**المفروض** : كل من المستقيمين ا ب ، حـ ء المتعامدان على المستوى م ع ( شكل ٩ )

**والمطلوب اثباته**: ان المستقيمين ا ب ، حـ ء متوازيان

**البرهان** : ليكن ب ، ى نقطتى تقاطع الخطين ا ب ، حـ ى مع المستوى م ن على التوالى

فبما ان ا ب عمود على م ن يكون المستوى ا ب ى عمودا عليه ايضا (نتيجة النظرية الخامسة) وحيث ان الخط ى حـ عمود على م ن فى نقطة ى فرضا فيقع بتمامه فى المستوى ا ب ى (نتيجة النظرية الخامسة)

∴ المستقيمان ا ب ، حـ ى فى مستو واحد

وحيث ان كلا من ا ب ، حـ ى فى مستو واحد وكل منهما عمود على المستقيم ب ى الموجود فى مستويهما فيكونان متوازيين وهو المطلوب

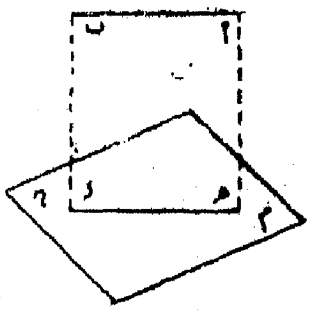
**النظرية التاسعة** : عكس النظرية السابقة صحيح ونترك للطالب البرهنة عليها وهى :

اذا توازى مستقيمان وكان احدهما عمودا على مستو ما كان المستقيم الآخر عمودا على هذا المستوى

**النظرية العاشرة** : — اذا توازى مستقيمان فكل مستوى يحتوى على احدهما ولا يحتوى على الآخر يكون موازيا له

**المفروض** : المستقيمان ا ب ، حـ ى المتوازيان (شكل ١٠) والمستوى م ن يحتوى على احدهما حـ ى ولا يحتوى على الآخر ا ب

**المطلوب اثباته** : ان المستوى م ن يوازى المستقيم ا ب




(شكل ١٠)

**البرهان** : بما أن ا ب ، حـ ى متوازيان فيكونان فى مستو واحد فاذا فرض أن المستقيم ا ب يقابل م ن فلا بد وان يقابله عند نقطة من نقط الخط حـ ى لانه خط تقاطع المستويين

ولكن ا ب لا يمكن ان يتقابل مع حـ ى لانه مواز له فلا يمكن ان يقابل المستوى م ن

∴ المستوى م ن يوازى المستقيم ا ب وهو المطلوب

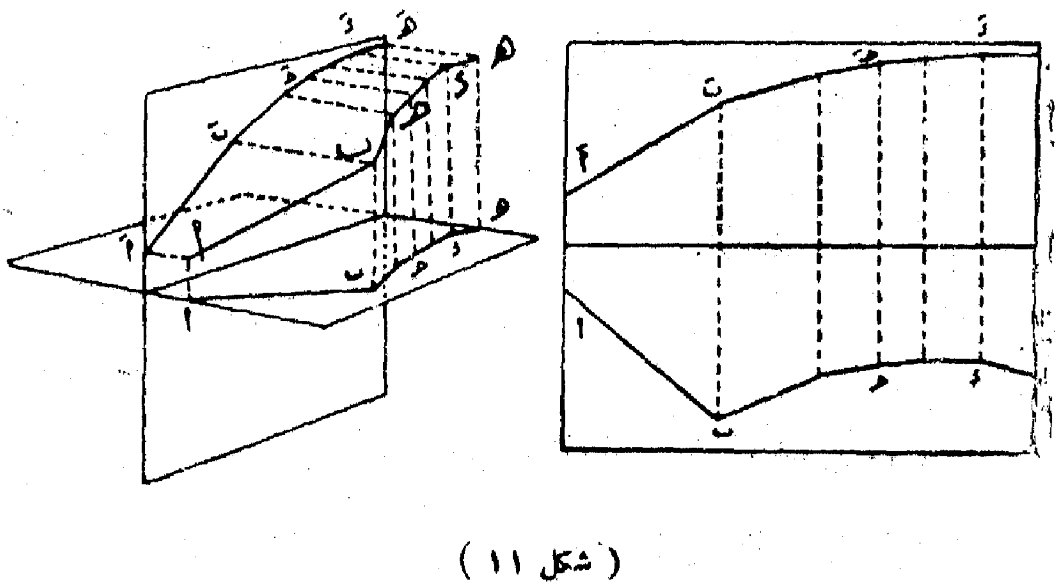
**النظرية الحادية عشر:** — عكس النظرية السابقة صحيح ونترك للطالب البرهنة عليها وهى : —

اذا وازى مستقيم مستويا فانه يوازى المستقيم المرسوم فى هذا المستوى وموجود فى مستويه

٥ — موقع العامود النازل من أى نقطة على اى مستوى يقال له مسقط تلك النقطة على ذلك المستوى

٦ — الخط المرسوم من أى نقطة عمودا على أى مستو يقال له احداثى تلك النقطة وهو بعدها عن ذلك المستوى . وبعد النقطة عن المستوى الافقى هو احداثيها الرأسى وبعدها عن المستوى الرأسى هو احداثيها الافقى .

٧ — مسقط اى خط على اى مستو هو الخط المحتوى على مساقط جميع نقط ذلك الخط ( شكل ١١ )



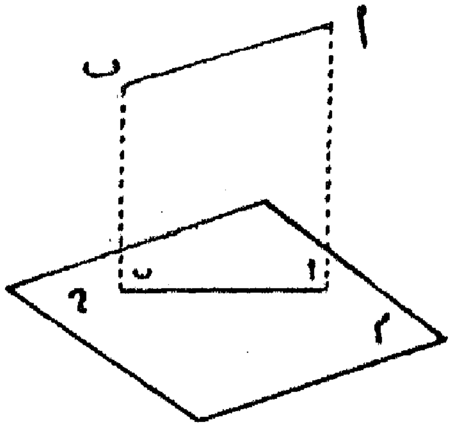
( شكل ١١ )

**النظرية الثانية عشر :** — مسقط الخط المستقيم على اى مستوى هو خط مستقيم

**المفروض** : الخط المستقيم ا ب والمستوى م ن ( شكل ١٢ )

**والمطلوب اثباته** : ان مسقط ا ب على المستوى م ن هو خط مستقيم

**البرهان** : لنفرض ان ا ب ب هو مستو يحتوى على الخط ا ب وعمود على المستوى م ن



(شكل ١٢)

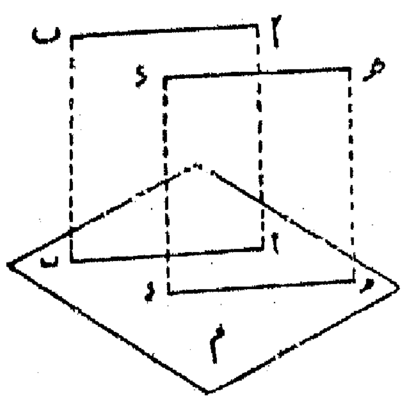
فيكون كل خط مرسوم من اى نقطة من نقط الخط ا ب وعمود على المستوى م ن واقعا فى المستوى ا ب ( النظرية الخامسة )

و بذلك تكون احداثيات جميع نقط الخط ا ب واقعة بتمامها فى المستوى ا ب وجميع مواقع تلك الاحداثيات تكون واقعة على خط تقاطع المستويين المذكورين وهو الخط المستقيم ا ب او ان مسقط ا ب هو الخط المستقيم ا ب وهو المطلوب

**نتيجة** : مسقط الخط المستقيم على اى مستوى مواز له هو خط مستقيم يساويه فى الطول

وذلك لان المستقيم ومسقطه واحداثيي نهايتيه تكوّن مستطيلا ( شكل ١٠ )

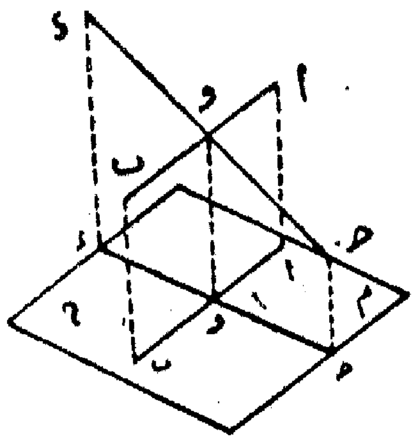
**نتيجة ٢** — اذا توازى مستقيمان فان مسقطيهما على أى مستو متوازيان ( شكل ١٣ ) .



( شكل ١٣ )

**النظرية الثالثة عشر** : اذا تعامد مستقيمان على بعضهما وكان احدهما موازيا لأى مستو فان مسقطيهما على هذا المستوى متعامدان

**المفروض** : المستقيمان ا ب ، حـ ى المتعامدان على بعضهما ( شكل ١٤ ) وان ا ب يوازى المستوى م ن




( شكل ١٤ )

**والمطلوب اثباته** : ان مسقطيهما ا ب ٯ حـ و متعامدان أيضا

**البرهان** : حيث ان الخط ا و مواز للمستوى م ن فيكون موازيا لمسقطه ا و عليه ( نتيجة من النظرية السابقة )

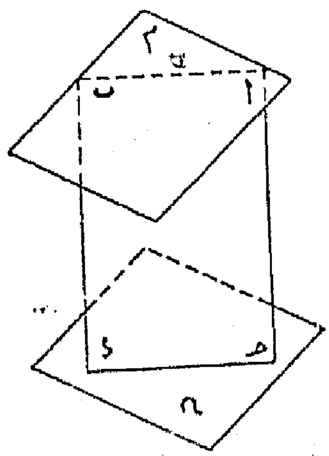
وحيث ان و و متعامد على ا و لانه احداثي نقطة و فيكون متعامدا ايضا على ا و الموازى له

وحيث ان ا و عمود على حـ و فرضا فيكون ا و عمودا على كل من الخطين حـ و ٯ ( و ) و وعلى مستويهما ( حـ و ) و (النظرية الثالثة )

وحيث ان ا و مواز للمستقيم ا و فيكون عموديا على المستوى حـ و و بهذا يكون عمودا على المستقيم حـ و

فيكون المسقطان ا ب ٯ حـ ء متعامدين وهو المطلوب

**النظرية الرابعة عشر** : اذا قطع مستو مستويين آخرين متوازيين فان خطى تقاطعه بهما متوازيان




( شكل ١٥ )

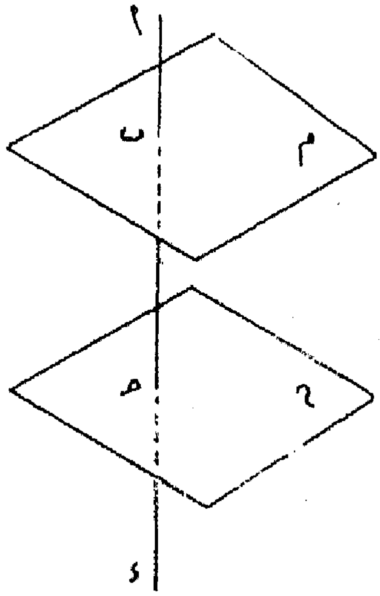
**المفروض** : المستويان المتوازيان م ٯ ن والمستوى ا ب ء قاطع لهما وان خطى تقاطعه بهما هما ا ب ٯ حـ ء (شكل ١٥)

**والمطلوب اثباته** : ان ا ب ٯ حـ ء متوازيان

**البرهان**: اذا فرض ان ا ب ٯ حـ ء ليسا متوازيين فيمكن تقابلهما فى نقطة مثل ع مثلا وتلك النقطة لابد وان توجد فى كل من المستويين م ٯ ن وهذا مخالف لتوازيهما

∴ ا ب ٯ حـ ء لا يمكن تقابلهما فيكونان متوازيين وهو المطلوب

**النظرية الخامسة عشر** : كل المستويات العمودى عليها مستقيم واحد متوازية




( شكل ١٦ )

المفروض: المستويان م ن والمستقيم ا ب عمود على كل منهما فى ب ح على التوالى ( شكل ١٦ )

والمطلوب اثباته: ان المستويين م ن متوازيان

البرهان المستويين م ن لا يمكن تلاقيهما لانهما اذا تلاقيا يتلاقيان فى خط مستقيم ولا مكن اذاً رسم خطين مائلين واصلين من النقطتين ب ح لاحدى نقط خط تقاطعهما ولكن المستقيم ا ء عمود على كل من المستويين فيكون عمودا على كل خط يلاقيه فى المستويين واذاً يكون عمودا على كل من الخطين المائلين المذكورين وهذا خلاف

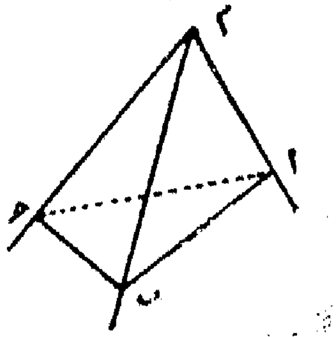
∴ المستويان م ن متوازيان ويوازيان كل مستو آخر يكون المستقيم ا ء عمودا عليه وهو المطلوب

# الفصل الثانى

## فى الاجسام

**الزوايا المجسمة :**

٨ — يطلق اسم الزاوية المجسمة على الفراغ المحدود بثلاث مستويات او اكثر تتلاقى فى نقطة واحدة ولا يشترك أى ثلاثة منها فى مستقيم وكل مستويين من هذه المستويات يتقاطعان فى مستقيم واحد يسمى بحرف المجسمة

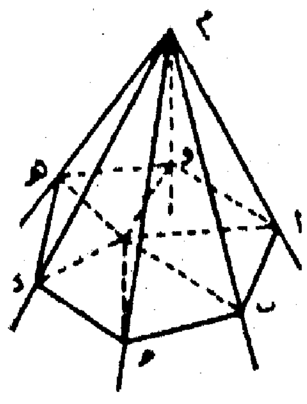



( شكل ١٧ )

والمستويات المحصورة بين الاحرف المتتالية تسمى باوجه المجسمة

والنقطة التى تتلاقى فيها مستويات المجسمة تسمى برأس المجسمة وتقرأ الزاوية المجسمة برأسها كالمجسمة م ( شكل ١٧ )

فاذا تكونت الزاوية المجسمة من ثلاثة أوجه سُميت ثلاثية واذا كانت أوجهها اكثر من ثلاثة سُميت زاوية مجسمة فقط كما فى (شكل ١٨ )




( شكل ١٨ )

ومجموع أي زاويتين من زوايا اوجه الزاوية المجسمة الثلاثية اكبر من الثالثة

**النظرية السادسة عشر :** كل زاوية مجسمة فيها مجموع زوايا الأوجه أصغر من مجموع أربع زوايا قوائم

**المفروض :** ان م . ا ب حـ ء هـ و زاوية مجسمة ( شكل ١٨ )

**المطلوب اثباته :** ان مجموع زوايا الاوجه ا م ب ، ب م حـ ، حـ م ء الخ أصغر من أربع زوايا قوائم

**العمل** : ارسم مستويا ما يقطع احرف المجسمة فى ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و
ثم اطلق على المضلع ا ب حـ ء هـ و اسم القاعدة وعلى كل من زوايا هـذا المضلع
كزاوية ا ب حـ اسم زاوية القاعدة وعلى كل زاوية من زوايا الاوجه المثلثية كزاوية
ا م ب اسم الزاوية التى بالرأس وعلى كل من الزوايا الاخرى للأوجه المثلثية كزاوية
ا ب م أسم الزاوية التى بقاعدة الوجه

∴ ا ب^م + م ب^حـ اكبر من ا ب^حـ

، ب حـ^م + م حـ^ء اكبر من ب حـ^ء وهلم جرا

لان كل زاويتين من زوايا الزاوية المجسمة الثلاثية اكبر من الثالثة (بند ٨)

∴ مجموع الزوايا التى بقواعد الاوجه المثلثية اكبر من مجموع زوايا القاعدة
وحيث أن مجموع زوايا القاعـدة تساوى ( ٢ ن — ٤ ) ق بفرض أن ن
عدد اضلاع المضلع ا ب حـ ء هـ و

∴ مجموع زوايا قواعد الاوجه المثلثية اكبر من ( ٢ ن ـ ٤ ) ق
ولـكن مجموع الزوايا التى بقواعد الأوجه المثلثيه + مجموع الزوايا التى بالرأس
= ٢ ن من القوائم = ٢ ن ق

∴ ٢ ن ق ـ مجموع الزوايا التى بالرأس اكبر من ( ٢ ن — ٤ ) ق
أى أن مجموع الزوايا التى بالرأس اصغر من ٤ ق وهو المطلوب

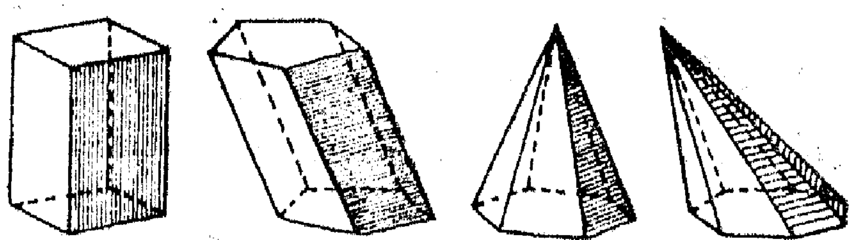
٩ — **كثيرات السطوح** : كثير السطوح هو جسم محدود كله بمستويات
من جميع جهاته وتسمى هذه المستويات باوجه كثير السطوح والمستقيمات التى تتقاطع
فيهـا المستويات باحرفه ونقط تقاطع الخطوط برؤوسه .

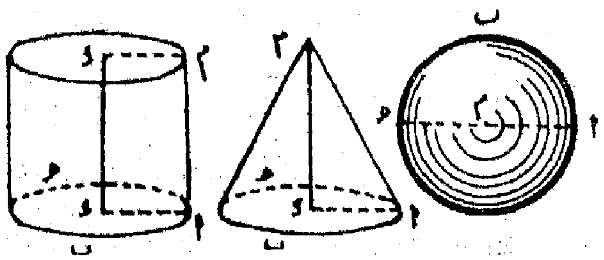
١٠ — **الهرم الثلاثى** : يُطلق على الجسم المـكوّن من أربعة أوجه وهو
أقلها بالهرم الثلاثى ويسمى أي جسم آخر بعدد أوجهه فما كان مكوناً من خمسة أوجه
سمى بذي الخمسة أوجه وما كان مكوناً من ستة أوجه بذى الستة أوجه وهكذا .

يطلق المنشور على كثير السطوح الذى فيه وجهان مضلعان متوازيان ومتساويان وموضوعه أحرف أحدهما فوق أحرف الآخر وموازية لها كل لنظيره والأوجه الأخرى وهى الجانبية أشكال متوازية الاضلاع واصلة بين الاحرف المتساوية المتوازية للقاعدتين . ويسمى المضلعان بقاعدتى المنشور ويسمى المنشور بشكل قاعدته فاذا كانت قاعدته مخمسة أطلق عليه منشور مخمس كما فى ( شكل ٢٠ ) وهكذا

أشكال

(١٩) (٢٠) (٢١) (٢٢)





(٢٣) (٢٤) (٢٥)

ويسمى كل وجه من الأوجه الأخرى بالوجه الجانبى للمنشور وتسمى أحرف كل وجه جانبى باحرفه الجانبية

ويسمى المنشور قائما اذا كانت أحرفه الجانبية عمودية على احدى قاعدتيه وعلى هذا تكون أوجه المنشور القائم كلها مستطيلات كما فى ( شكل ١٩ ) .

ويسمى المنشور منتظما اذا كانت قاعدتاه مضلعين منتظمين

ويسمى المنشور الذى قاعدتاه « متوزيا أضلاع » بمتوازى السطوح فتكون جميع أوجه متوازى السطوح كلها أشكالا متوازية الاضلاع وكل وجهين متقابلين منها متساويين

و يكون متوازى السطوح قائما أو مائلا فاذا كان قائما وكانت قاعدتاه مستطيلين سمى متوازى المستطيلات ( شكل ١٩ )

والمكعب هو متوازى مستطيلات أوجهه مربعات متساوية كما فى ( شكل ٢٧ )

وكثير السطوح المنتظم هو ما كانت جميع أوجهه مضلعات منتظمة متساوية وجميع زواياه المجسمة متساوية كما فى الاشكال ( من ٢٦ الى ٣٠ )

**الاجسام المستديرة :**

١١ — **الاسطوانة** : الأسطوانة هى جسم مستدير يتكون سطحه الأسطوانى من حركة مستقيم مثل م ا يقطع منحنيا معلوما مثل المنحنى ا ب حـ ويوازى أثناء دورانه مستقيما معلوما مثل المستقيم ى ى يسمى بمحور الاسطوانة ( شكل ٢٣ ) ويسمى المستقيم المتحرك م ا براسم الاسطوانة وأما الخط المنحنى ا ب حـ الذى يقطعه الراسم أثناء الدوران فيسمى الدليل

فاذا كان الراسم عموديا على القاعدة سميت الاسطوانة قائمة وفى غير ذلك تسمى مائلة واذا كان الدليل محيط دائرة سميت الاسطوانة دائرية . واذا قطعت الاسطوانة الدائرية بمستو يوازى قاعدتها كان المقطع الحادث دائرة تساوى القاعدة

واذا قطعت الاسطوانة الدائرية القائمة بمستو يوازى محورها كان المقطع الحادث مستطيلا

١٢ — **المخروط** : المخروط هو جسم يتكون سطحه المخروطى من حركة مستقيم مثل م ا يمر بنقطة معينة مثل م ويقطع منحنيا معلوما مثل المنحنى ا ب حـ وتسمى النقطة الثابتة م رأس المخروط والمستقيم المتحرك م ا راسمه ويسمى الخط المنحنى ا ب حـ الذى يقطعه الراسم بالدليل كما فى ( شكل ٢٤ ) والمستوى الذى يحد السطح المخروطى يسمى بقاعدة المخروط . اذا كان الدليل متماثلا بالنسبة الى نقطة ما مثل ء سمى المستقيم م ء الواصل من هذه النقطة الى رأس المخروط بمحوره فاذا كان المحور عموديا على القاعدة سمى المخروط قائما وفى غير ذلك يسمى مائلا

واذا كان الدليل دائرة سمى المخروط دائريا ويكون المخروط الدائرى قائما أو مائلا اذا كان محوره عموديا على قاعدته أو مائلا عليها على التوالى

واذا قُطع المخروط الدائرى بمستو يوازى القاعدة كان المقطع الحادث دائرة أما اذا كان المستوى ماراً بالرأس وقاطعاً لسطح المخروط كان المقطع الحادث مثلثا .

واذا قطع المخروط بمستو موازى للقاعدة وحذف الجزء الذى بين الرأس والمستوى القاطع سُمى الجزء الباقى بالمخروط الناقص المتوازى القاعدتين

١٣ — **الكرة** : ــ الكرة هى جسم مستدير يتكوّن سطحه الكروى من دوران نصف محيط دائرة مثل ا ب حـ حول قطرها ا حـ ومركز الكرة هو مركز نصف الدائرة م الذى يتولد منها السطح وكل مستقيم مار بمركز الكرة وينتهى طرفاه بسطح الكرة يسمى قطرها مثل ا حـ كما فى ( شكل ٢٥ )

واذا قطعت الكرة بمستو ما فان المقطع الحادث هو دائرة وتقاطع كرتين ببعضهما يحدث دائرة أيضا

وكل أربع نقط ليست فى مستو واحد يمكن أن تمر بها كرة واحدة ولا يمكن أن يمر بها غيرها

١٤ — **الهرم** : ــ الهرم هو جسم كثير السطوح أحد أوجهه مضلع ايًّا كان ويسمى بقاعدة الهرم وأوجهه الاخرى مثلثات قواعدها هى أضلاع هذا المضلع ورؤوسها مجتمعة فى نقطة واحدة خارجة عنه تسمى رأسه

والخط المستقيم الواصل من الرأس لمركز القاعدة يسمى محور الهرم

فاذا كان المحور عموديا على القاعدة سُمى الهرم قائما كما فى ( شكل ٢١ )

واذا كان المحور مائلا على القاعدة سُمى الهرم مائلا كما فى ( شكل ٢٢ )

**النظرية السابعة عشر** : لا يمكن أن يوجد اكثر من خمسة انواع من كثيرات السطوح المنتظمة

**البرهان** : اذا كان كثير السطوح منتظما يجب أن تكون جميع أوجهه اشكالا منتظمة وهذه اما أن تكون مثلثات متساوية الأضلاع ( وكل زاوية من زواياها ٦٠° )

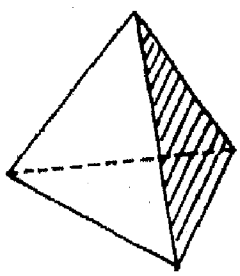
أو مربعات (وكل زاوية من زواياها ٩٠°) أو مخمسات ( وكل زاوية من زواياها ١٠٨° ) أو مسدسات ( وكل زاوية من زواياها ١٢٠° ) وهكذا . وحيث أنه يجب أن يكون مجموع الزوايا المستوية المكونة لأوجه الزاوية المجسمة أقل من أربع قوائم أى أقل من ٣٦٠° ( نظرية ١٦ )

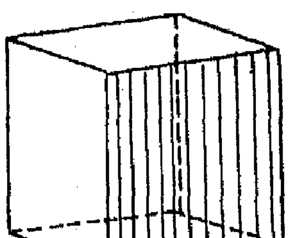
ينتج أنه يمكن فقط ايجاد زاوية مجسمة محدودة إما بمثلثات متساوية الأضلاع عددها ثلاثة ( شكل ٢٦ ) أو أربعة فقط ( شكل ٢٨ ) أو خمسة فقط ( شكل ٣٠ ) ولا يمكن أن تكون اكثر من ذلك بسبب أن الزوايا المستوية المكونة لأوجه المجسمة لا تزيد عن ٣٦٠°

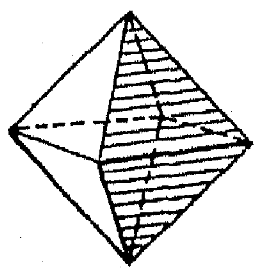
واما أن تكون الزاوية المجسمة محدودة بثلاث مربعات ولا اكثر بالسبب عينه (ش ٢٧)

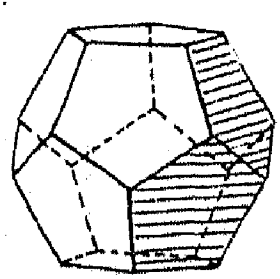
واما أن تكون المجسمة محدودة بثلاث مخمسات منتظمة ولا اكثر ( شكل ٢٩ ) ولا يمكن أن تكون المجسمة محدودة بثلاث مسدسات لنفس السبب .

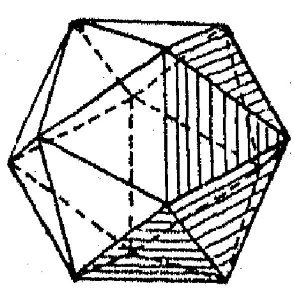
وعلى ذلك لا يمكن أن يكون هناك اكثر من خمسة انواع من كثيرات السطوح المنتظمة وهى : —


شكل ( ٢٦ )


» ( ٢٧ )


شكل ( ٢٨ )


» ( ٢٩ )


» ( ٣٠ )

أولا — **الهرم الثلاثى** : وهو ما تكوّن من زاوية مجسمة محدودة بثلاث مثلثات متساوية فتكون قاعدته مثلثا متساوى الأضلاع أيضا مساويا لمثلثات الأوجه الأخرى كما فى ( شكل ٢٦ )

ثانيا — **المكعب** : وهو ما تكوّن من ستة أوجه وكلها مربعات متساوية كما فى ( شكل ٢٧ )

ثالثا — **كثير السطوح المنتظم ذو الثمانية أوجه** : وهو ما تكون من هرمين متساويين قاعدتاهما منطبقتان على بعضهما وكل رأس منهما مكوّنة من زاوية مجسمة محدودة باربع مثلثات متساوية الأضلاع كما فى ( شكل ٢٨ )

رابعا — **كثير السطوح ذو الاثنى عشر وجها** : وهو ما كانت كل زاوية من زواياه المجسمة محدودة بثلاث مخمسات منتظمة كما فى ( شكل ٢٩ )

خامسا — **كثير السطوح ذو العشرين وجها** : وهو ما تكونت كل زاوية من زواياه المجسمة من خمسة مثلثات متساوية الأضلاع كما فى ( شكل ٣٠ )

والجدول التالى يبيّن انواع كثيرات السطوح الخمس المنتظمة وعدد أوجهه وعدد أضلاع كل وجه وعدد احرف أوجهها وعدد الأوجه المتجمعة فى كل رأس منها وعدد رؤوس كل منها :

| كثير السطوح المنتظم | عدد الاوجه | عدد اضلاع أحد الاوجه | عدد الاحرف | عدد الاوجه المجتمعة فى كل رأس | عدد الرؤوس |
|---|---|---|---|---|---|
| الهرم الثلاثى | ٤ | ٣ | ٦ | ٣ | ٤ |
| المكعب | ٦ | ٤ | ١٢ | ٣ | ٨ |
| ذو الثمانية أوجه | ٨ | ٣ | ١٢ | ٤ | ٦ |
| « الاثنى عشر وجهاً | ١٢ | ٥ | ٣٠ | ٣ | ٢٠ |
| « العشرين وجهاً | ٢٠ | ٣ | ٣٠ | ٥ | ١٢ |

## ( تمرينات متنوعة على الهندسة الفراغية )

( ١ ) الزاوية ا ب حـ قائمة و حـ ء عمود على المستوى ا ب حـ إثبت أن ا ب عمود على ب ء

( ٢ ) إثبت انه اذا تقاطعت ثلاث مستويات فاما أن تتلاقى خطوط التقاطع فى نقطة أو تتوازى .

( ٣ ) اذا تقاطعت ثلاث مستقيمات فى نقطة واحدة وقطع الجميع مستقيما رابعاً غير مار بتلك النقطة . إثبت أن المستقيمات الأربعة فى مستو واحد .

( ٤ ) إذا توازت ثلاثة مستقيمات وقطع الجميع مستقيم رابع . اثبت أن المستقيمات الأربعة فى مستو واحد .

( ٥ ) إثبت انه اذا توازت ثلاثة مستقيمات وازى كل منها مستو المستقيمين الآخرين

( ٦ ) إثبت أنه اذا وازى مستو خط تقاطع مستويين آخرين كان قاطعاً لهما فى مستقيمين متوازيين

( ٧ ) اثبت أنه لا يمكن أن يكون المستقيم عموداً على كل من مستويين متقاطعين.

( ٨ ) المطلوب رسم مستو يمر بنقطة معلومة ويكون عموديا على مستقيم معلوم

( ٩ ) حجرة على شكل متوازى المستطيلات طولها ٦ أمتار وعرضها ٥ أمتار وارتفاعها ٤ أمتار والمطلوب إيجاد طول القطر الواصل من أحد أركان السقف الى الركن المقابل له على الارض .

(١٠) إثبت أن العمود النازل على مستو من نقطة خارجة عنه أقصر من أى خط ممدود من تلك النقطة الى المستوى

(١١) إثبت أن البعد بين المستويين المتوازيين ثابت

(١٢) إثبت أنه اذا توازت المستقيمات المتساوية ساوت وتوازت مساقطها على مستو معلوم

(١٣) مستقيمان ا ب ، حـ ء ليسا فى مستو واحد والمطلوب رسم مستوى يمر بأحدهما و يوازى الآخر .

(١٤) مستقيمان ا ب ، حـ ء ليسا فى مستو واحد والمطلوب رسم مستو يمر بنقطة معلومة و يوازى كلا من المستقيمين المعلومين .

(١٥) المطلوب ايجاد نقطة مثل ل على مستقيم فراغى ا ب بحيث اذا مد منها مستقيم الى كل من نقطتين معلومتين مثل م ، ن كان م ل = ل ن .

(١٦) اثبت أن مجموع زوايا أي شكل رباعى ليست أضلاعه فى مستو واحد أقل من أربع قوائم .

(١٧) إثبت أنه اذا قطع مستو أحرف زاوية مجسمة ثلاثية بحيث جعلها متساوية كان موقع العمود النازل من رأس المجسمة على المستوى هو مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث الحادث من تقاطع المستوى بأوجه الزاوية .

وهـذا يتمم ما يحتاج اليه الطالب فى علم الهندسة الفراغية لفهم ما يلى فى الهندسة الوصفية .

# الفصل الثالث

## فى مساقط النقط والخطوط

١٥ـ **علم الهندسة الوصفية** : هو ذلك الفرع الهندسى الذى يبحث فى تمثيل النقط والخطوط والاشكال والاجسام الموجودة فى الفراغ على أسطح مستوية بحيث يمكن تعيين مواضعها وأبعادها الحقيقية .

وبمعنى آخر أنه هو ذاك الفرع الذى بواسطته يمكننا أن نضع رسومات دقيقة للآلات والمنشئات أو أجزائها وتحويل جميع المسائل المتعلقة بالاشكال المجسمة وغير المجسمة فى الهندسة الفراغية الى نظيراتها على شكل الهندسة المستوية وذلك باسقاط تلك الأجسام وغير الاجسام على أسطح مستوية .

١٦ ـ **المساقط** : تكلمنا فى الهندسة الفراغية عن مسقط النقطة على أى مستو ويمكن به الاستعانة على فهم معنى مسقط خط مستقيم أو مسقط سطح على مستوى لان السطح يتكون من خطوط والخط من جملة نقط .

فمسقط النقطة على أى مستو يقصد به فى علم الهندسة الوصفية موقع العمود النازل من هذه النقطة على المستوى . ومسقط الخط على أى مستو هو الخط المحتوى على مساقط جميع نقط هذا الخط . انظر ( شكل ١١ )

وقد يلاحظ أنه عند تعيين موضع أى شكل فى الفراغ بواسطة المساقط لا يكفى لذلك إسقاطه على مستو واحد حتى نعين حقيقته بل ربما نحتاج الى إسقاطه على مستويين أو ثلاثة .

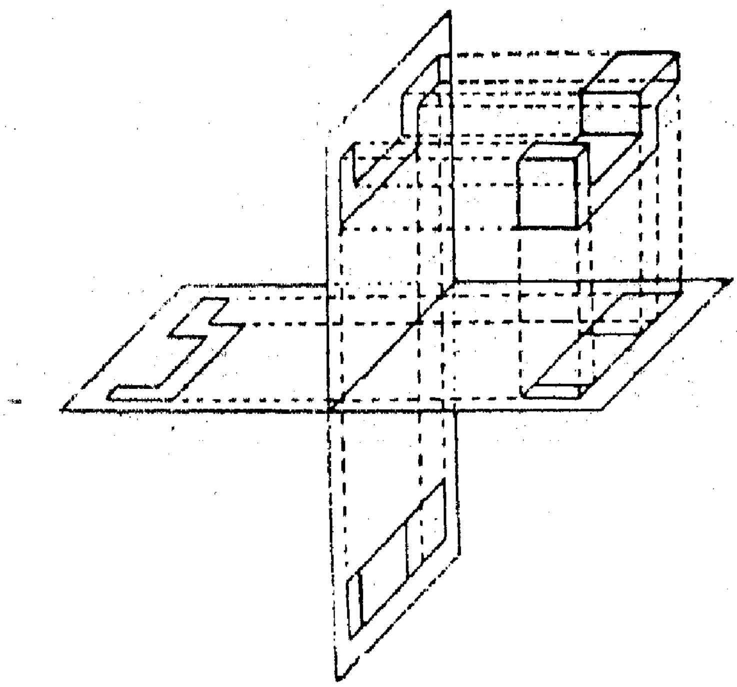
فمثلا اذا فرض أن ا ب حـ هو مسقط أى مثلث موجود فى الفراغ فمن الواضح

أن حقيقة هذا المثلث تتوقف على معرفة زواياه وأطوال أضلاعه . فمسقط واحد اذاً لا يعطينا تلك المعلومات فاذا أخذنا مسقطاً آخر لهذا المثلث مثل آَ بَ حَ على مستو آخر عمودى على المستوى الاول لأمكننا أن نعين تماماً حقيقة شكله وأبعاده

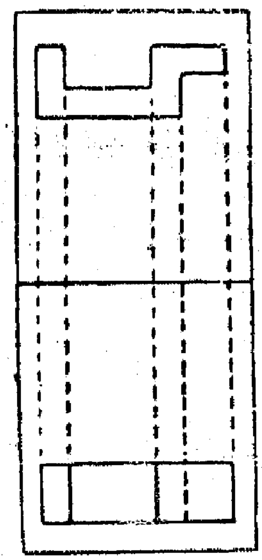
وشكل (٣٢) يبيّن تمثيل جسم بواسطة مسقطين له على كل من مستويين متعامدين وأحد المستويين أفقى والآخر رأسى وهذان المستويان يقسمان الفراغ المحيط بهما الى اربعة زوايا وتسمى بالاولى والثانية والثالثة والرابعة الزوجية كما هو واضح (بشكل ٣١)

ويسمى هذان المستويان بمستويى المسقط .

ويسمى المسقط الموجود على المستوى الافقى بالمسقط الافقى والموجود على المستوى الرأسى بالمسقط الرأسى



( شكل ٣١ )



( شكل ٣٢ )

فاذا تصورنا دوران المستوى الرأسى فى ( الشكل ٣١ ) حول خط تقاطعه مع المستوى الافقى ومعه المسقط الرأسى للشكل الى أن يأخذ وضعاً أفقياً ( ينطبق مستويا

المسقط على بعضها ) ويظهر لنا المسقطان الرأسى الافقى فى مستو واحد كما هو مبين فى ( شكل ٣٢ )

ويسمى خط تقاطع المستويين بخط الارض .

وقد يتعذر أحياناً بيان حقيقة أى شكل وموضعه فى الفراغ من مسقطيه الرأسى والافقى فقط ويحتاج الامر الى رسم مسقط ثالث لاتمام جميع بياناته فيؤخذ هذا المسقط الثالث على مستو متعامد على كل من مستويى المسقط ويقال له المستوى الجانبى

ويسمى المسقط المحتوى عليه هذا المستوى بالمسقط الجانبى وسيأتى الكلام على ذلك فيما بعد . فبذلك قد أمكننا تحويل شكل الجسم وتصوره فى الفراغ إلى أشكال على أسطح مستوية كما فى الهندسة المستوية

١٧ — الرموز الاصطلاحية للمساقط الثلاث : —

يرمز للنقط والخطوط والاشكال والأجسام فى الهندسة الوصفية بحروف وذلك لسهولة قراءتها وتمييزها

فعادة يرمز للنقطة فى للفراغ بحرف غليظ ويرمز لمسقطها الافقى بحرف عادى ولمسقطها الرأسى بحرف فوقه شرطه ولمسقطها الجانبى بحرف فوقه شرطتين ويقال للنقطة ا مثلا ( ا اَ ) اذا كانت ممثلة بمسقطين أو ا اَ اً اذا كانت ممثلة بثلاثة مساقط وهكذا يسمى الخط ا ب مثلاً ( ا ب — اَ بَ ) أو ( ا ب — اَ بَ — اً بً )

**النظرية الثامنة عشر** : — مسقطا أى نقطة فراغية يقعان على مستقيم واحد عمودى على خط الارض .

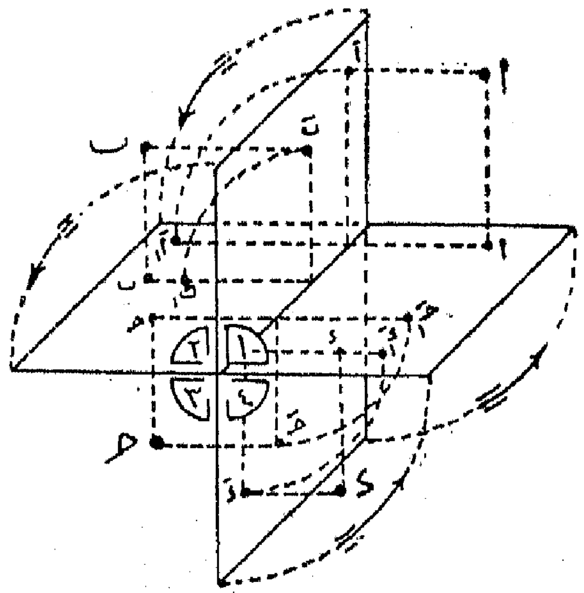
**المفروض** : النقطة ا فى الفراغ وأن ا مسقطها الأفقى و اَ مسقطها الرأسى ( شكل ٣٤ )

**البرهان** : — المستقيم ا ا عمود على المستوى الأفقى والمستقيم ا اَ عمود على المستوى الرأسى فيكون مستويهما وهو ا ا اَ عموداً على كل من مستويى المسقط الرأسى والافقى ويكون عموداً أيضاً على خط الارض ( خط تقاطعهما )

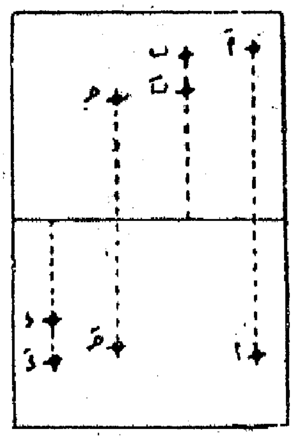
وبالعكس يكون خط التقاطع عموداً على مستويهما

∴ خط الارض عمود على ا اَ بعد تطبيق المستوى الرأسى على المستوى الافقى كما فى ( شكل ٣٤ ) وهو المطلوب

## أوضاع النقطة فى الفراغ ومساقطها على مستوى المسقط : —



( شكل ٣٣ )



( شكل ٣٤ )

يبيّن ( الشكل ٣٣ ) أوضاع النقطة فى الفراغ فى الزوايا الاربع فالنقطة ا ومسقطاها ا اَ موجودة فى الزواية الاولى والنقطة ب فى الزاوية الثانية ومسقطاها ب بَ والنقطة حـ فى الزاوية الثالثة ومسقطاها حـ حـَ والنقطة ى فى الزاوية الرابعة ومسقطاها ى ىَ .

يبيّن ( الشكل ٣٤ ) مسقطى كل من الاربعة نقط المتقدمة على مستوى المسقط بعد انطباقهما وفيه يلاحظ أن : —

أولا — النقطة ا اَ التى فى الزاوية الاولى يكون مسقطها الافقى تحت خط الارض ومسقطها الرأسى فوق خط الارض

ثانياً — والنقطة ب بَ التى فى الزاوية الثانيــة يكون مسقطاها الافقى والرأسى موجودين فوق خط الارض

ثالثاً — والنقطة حـ حـَ التى فى الزاوية الثالثة يكون مسقطها الأفقى والرأسى موجودين تحت خط الارض .

وينتج من ذلك أن : —

أولا — المسقط الأفقي للنقطة يكون تحت أو فوق خط الأرض اذا كانت النقطة أمام أو خلف المستوى الرأسي على التوالي .

ثانيا — ويكون المسقط الرأسي فوق خط الارض او تحته اذا كانت النقطة فوق او تحت المستوى الافقي على التوالي

ثالثا — المسافة العمودية بين المسقط الافقي لاى نقطة و بين خط الارض هى بعدها عن المستوى الرأسي . والمسافة العمودية بين مسقطها الرأسي و بين خط الارض هي بعدها عن المستوى الأفقي . ومن ذلك يمكن تسمية النقطة بذكر بعديها عن كل من المستوى الرأسي والافقي .

فمثلا النقطة ( ٣ ، ٤ ) س م . هى التى تبعد ٣ س م عن المستوى الرأسي ، ٤ س م عن المستوى الافقي على التوالي .

رابعا — المسافة العمودية بين مسقطها الرأسي وخط الأرض تسمى بأحداثيها الرأسي والمسافة العمودية بين مسقطها الافقي وخط الارض تسمى باحداثيها الافقي والمستقيم الجامع للاحداثيين معاً للنقطة يسمى خط تذكار النقطة المذكورة . فالخط ا اَ هو خط تذكار النقطة ا ( شكل ٣٣ )

## الطول الحقيقي وميل واثرى الخط المستقيم :

### ١٨ — تعاريف

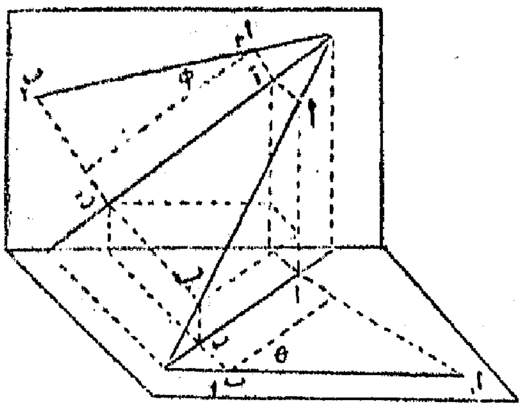
مسقط الخط المستقيم على أى مستوى هو الخط الواصل بين مسقطي نهايتيه و يكون طول المسقط أقصر من الخط المستقيم دائما إلا إذا وازى الخط المستقيم المستوى . وفى الحالة الاخيرة يكون مسقطه مساويا طوله و يوازيه

ميل الخط المستقيم على أى مستوى يقدر بالزاوية الواقعة بين هـذا الخط فى الفراغ و بين مسقطه على ذلك المستوى

أثر الخط المستقيم على أى مستو هو نقطة تقابله مع هـذا المستوى . وفى علم الهندسة الوصفية يقصد بأثر المستقيم نقطة تقابله مع كل من مستويي المسقط فأثره

الرأسى هو نقطة تقابله مع المستوى الرأسى وأثره الافقى هو نقطة تقابله مع المستوى الافقى

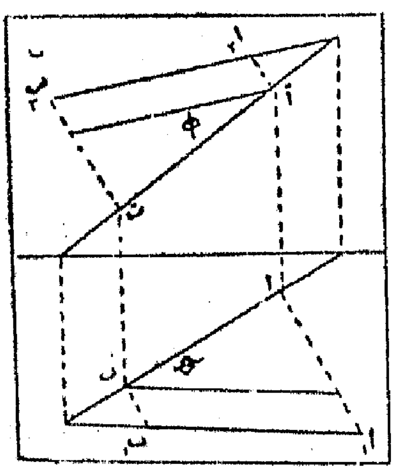
**مسألة ١** — تعيين المسافة بين نقطتين معلوم المسقط الرأسى والافقى لكل منهما أو بعبارة أخرى إيجاد الطول الحقيقى لخط مستقيم معلوم مسقطاه الرأسى والافقى ولذلك طريقتان



( شكل ٣٥ )

**الطريقة الأولى** :— من الشكل المنظور ( نمرة ٣٥ ) يلاحظ أن من الخط المستقيم ا ب الموجود فى الفراغ ومن مسقطه الأفقى ا ـ ب ـ والاحداثين ا ا ى ب ب ـ يتكوّن أولاً شبه منحرف ا ا ب ب ـ فاذا تصورنا دوران هذا الشكل حول المسقط الافقى ا ـ ب ـ حتى ينطبق على المستوى الافقى لنتج شبه المنحرف ا١ ا ب١ ب ـ المرسوم فى المستوى الافقى وبما أن ميل أى مستقيم على اى مستو هو مقدار الزاوية المحصورة بين الخط فى الفراغ وبين مسقطه على هـذا المستوى ( كما سبق فى التعريف ) نرى ان ميل الخط ا ب على المستوى الافقى هو مقدار الزاوية θ

ويلاحظ ثانيا ان الخط ا ب نفسه مع مسقطه الرأسى اَ بَ والاحداثيين ا اَ ى ب بَ يكوّن شبه منحرف آخر لو تصورنا دورانه حول المسقط الرأسى اَ بَ حتى ينطبق على المستوى الرأسى لنتج شبه المنحرف اَ بَ ب٢ ا٢ المرسوم فى المستوى الرأسى وكان ا٢ ب٢ هو الطول الحقيقى للخط أيضا والزاوية Φ هى ميل الخط على المستوى الرأسى .



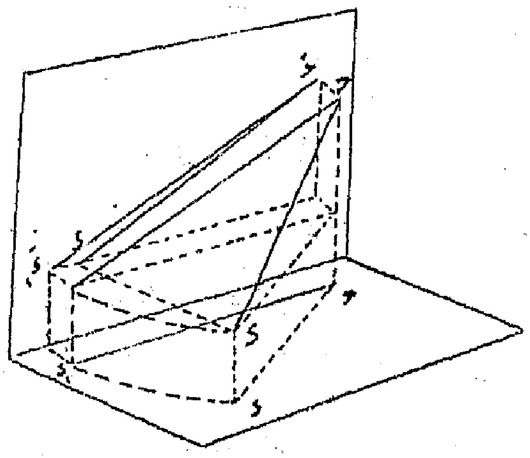
( شكل ٣٦ )

وبدوران المستوى الرأسى حول خط الأرض الى أن ينطبق على المستوى الافقى يظهر المسقطان الرأسى والافقى لهذا الخط كما فى (شكل ٣٦) ويظهر أيضا شبه المنحرفين ا١ ا ب١ ب ـ تحت خط الارض الذى به ا١ ب١ هو الطول الحقيقى والزاوية θ هى ميله على المستوى الافقى .

وايضاً شبه المنحرف ا٢ ب٢ بَ اَ فوق خط الارض الذى به ا٢ ب٢ هو الطول الحقيقى للخط والزاوية Φ هى ميله على المستوى الرأسى

ويستنتج من ذلك أنه يمكننا اذا علمنا كلا من المسقط الرأسى والافقى لأى خط مثل ا ب أن نجد طوله الحقيقى وميله على كل من مستويى المسقط برسم عمودين على مسقطه الافقى من كلتا نهايتيه ا و ب نأخذ عليها على التوالى بعد كل من النقطتين ا و ب عن المستوى الافقى او بعبارة اخري بعد كل من اَ و بَ عن خط الارض ونصل نهايتى العمودين المذكورين ا١ ب١ فيكون هو الطول الحقيقى للخط المذكور وتكون الزاوية θ هى ميله على المستوى الافقى

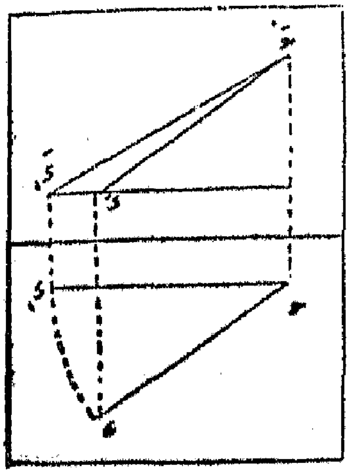
وبالمثل اذا رسمنا عمودين من كلتا نهايتى المسقط الرأسى اَ بَ واخذنا عليهما كلا من البعدين اَ ا٢ و بَ ب٢ مساويين الى بعدى النقطتين ا و ب عن خط الارض على التوالى لكان ا٢ ب٢ ايضا هو الطول الحقيقى للخط والزاوية Φ هى ميله على المستوى الرأسى وهذه الطريقة تسمى بطريقة الانطباق


( شكل ٣٧ )

الطريقة الثانية — من الشكل المنظورة نمرة ٣٧ نرى أننا اذا تصورنا دوران الخط حـ ى بحيث تكون نهايته حـ ثابتة ونهايته الاخرى ى تدور بحيث يكون ارتفاعها عن المستوى الافقى ثابتا إلى أن يصير الخط حـ ى موازيا المستوى الرأسى لانتقل مسقط النقطة ى الرأسى وهو النقطة ىَ على خط مستقيم أفقى إلى ىَ١ وانتقل المسقط الافقى لها وهو ى على قوس من دائرة الى النقطة ى١ حتى يصير المسقط الافقى نفسه موازيا الى المسقط الرأسى فيكون موازيا لخط الارض . وفى هذه الحالة يكون المسقط الرأسى الجديد حـَ ىَ١ هو طوله الحقيقى والزاوية θ هى ميله على المستوى الافقى

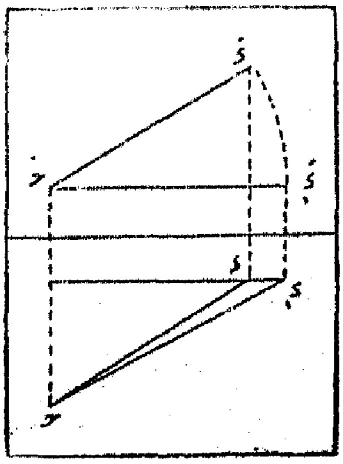
فاذا فرض ان حـ ى و حـَ ىَ هما مسقطا الخط حـ ى الافقى والرأسى على التوالى

شكل (٣٨) وركزنا في النقطة هـ وبفتحة تساوى طول المسقط الافقى هـ ء ورسمنا قوسا الى ان يكون هذا المسقط موازيا للمستوى الرأسى أو بعبارة أخرى موازيا لخط الأرض ومددنا من ء خطا أفقيا واسقطنا من ء١ العمود ء١ ءَ١ على خط الارض لكانت نقطة ءَ١ هى المسقط الرأسى الجديد للنقطة ء وكان هـَ ءَ١ هو الطول الحقيقى للخط هـ ء والزاوية θ هى ميله على المستوى الافقى



( شكل ٣٨ )

وبنفس الطريقة يمكننا دوران المستقيم هـَ ءَ إلى أن يصير موازيا للمستوى الافقى

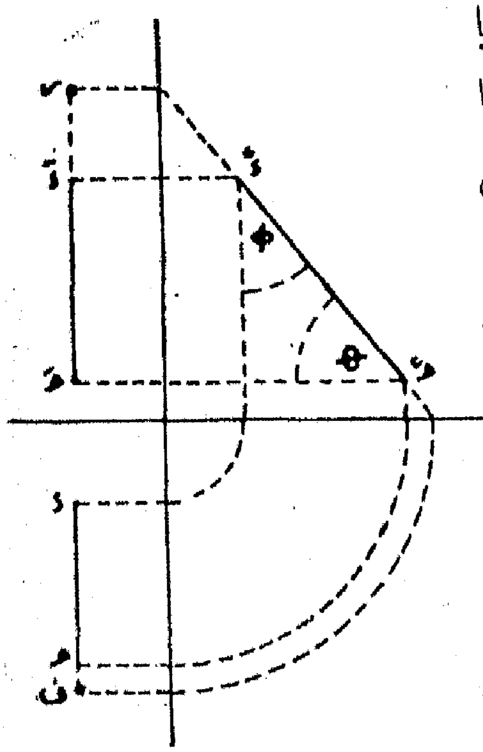


( شكل ٣٩ )

ففى شكل ( ٣٩ ) المفروض أن هـ ء و هـَ ءَ هما مسقطا الخط هـ ء الافقى والرأسى على التوالى فاذا ركزنا فى النقطة هـَ وبفتحة تساوى طول المسقط الرأسى هـَ ءَ ورسمنا قوسا حتى يصبح هذا المسقط موازيا المستوى الافقى أو بعبارة أخرى موازيا لخط الارض ومددنا من ء خطا أفقيا وأسقطنا من ءَ١ عمودا عليه ءَ١ ء١ لكانت نقطة ء١ هى المسقط الافقى الجديد للنقطة ء ويكون هـ ء١ هو الطول الحقيقى للخط هـ ء و Φ هى زاوية ميله على المستوى الرأسى

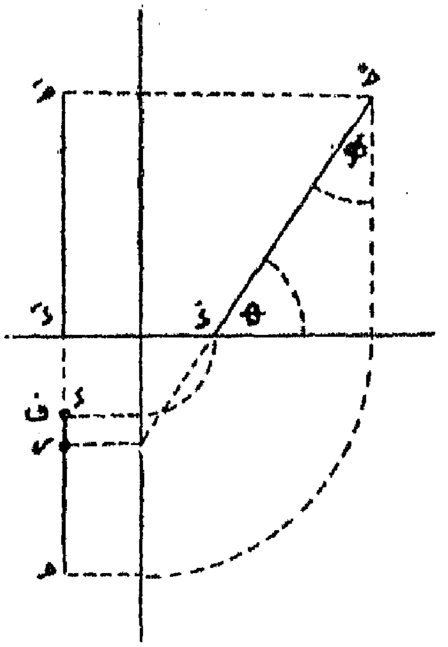
أما اذا كان الخط عموديا على خط الارض فيكون مسقطاه على مستقيم واحد عمودى على خط الارض ولايكفيان لتعيين وضعه الحقيقى

فلمعرفة وضعه الحقيقى يستعان بالمستوى الجانبى فبايجاد المسقط الجانبى كما فى شكلى ٤٠



(شكل ٤٠)

ﻥ ٤١ للخط حـ ى تتعين زاويتا الميل $\theta$ ﻭ $\Phi$ على الافقى وعلى الرأسى على التوالى وطوله الحقيقى حـ ى١



( شكل ٤١ )

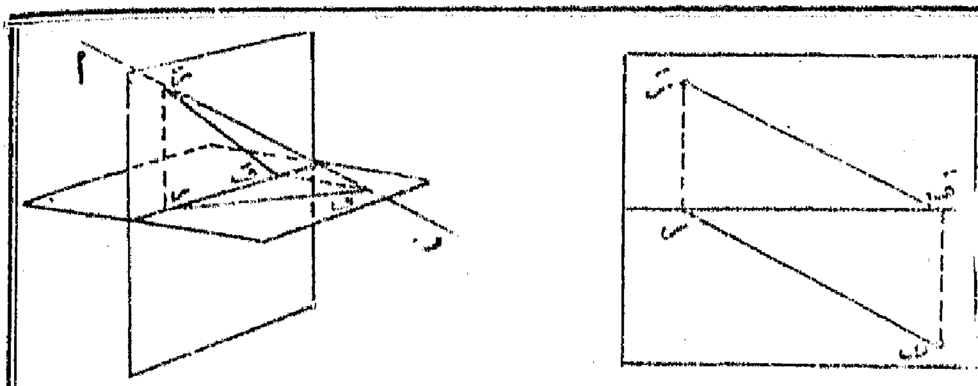
**مسألة ٢** — ايجاد أثرى خط مستقيم معلوم مسقطاه

حيث أن الاثر الرأسى لاى خط هو نقطة تلاقيه مع المستوى الرأسى فتكون هذه النقطة فى المستوى الرأسى اذاً يكون مسقطها الافقى على خط الارض لان بعدهـا عن المستوى الرأسى يساوى صفرا

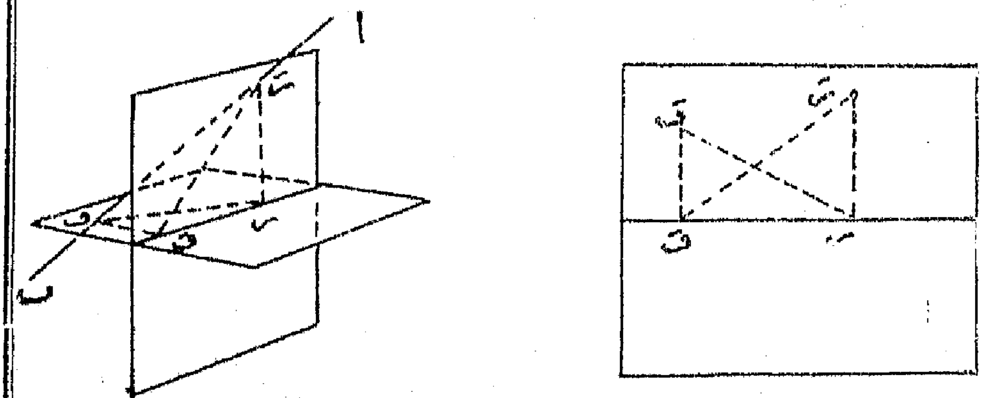
وكذا الاثر الافقى هو نقطة على المستوى الافقى يكون مسقطها الرأسى على خط الارض لان بعدها عن المستوى الافقى يساوى صفرا

صار حينئذ من السهل تعيين كل من الاثرين الافقى والرأسى لاى خط مستقيم فلايجاد ذلك نمد المسقط الرأسى الى ان يقابل خط الارض فى نقطة تكون هى المسقط الرأسى للأثر الافقى فنرسم من هذه النقطة عمودا على خط الارض الى أن يلاقى المسقط الافقى أو امتداده فى نقطة تكون هى الاثر الافقى للخط المذكور ولايجاد الاثر الرأسى نمد المسقط الافقى الى أن يقابل خط الارض فى نقطة تكون هى المسقط الافقى للأثر الرأسى فنرسم من هذه النقطة عمودا على خط الارض الى أن يلاقى المسقط الرأسى أو امتداده فى نقطة تكون هى الاثر الرأسى للخط المذكور ومن الاشكال المنظورة وغير المنظورة المجسمه فى الاشكال من نمرة ٤٢ الى نمرة ٤٥ وممثلة لاوضاع الخط المستقيم ا ب فى الزوايا الاربع تظهر بسهولة طريقة ايجاد أثرى هذا الخط بمعلومية مسقطيه

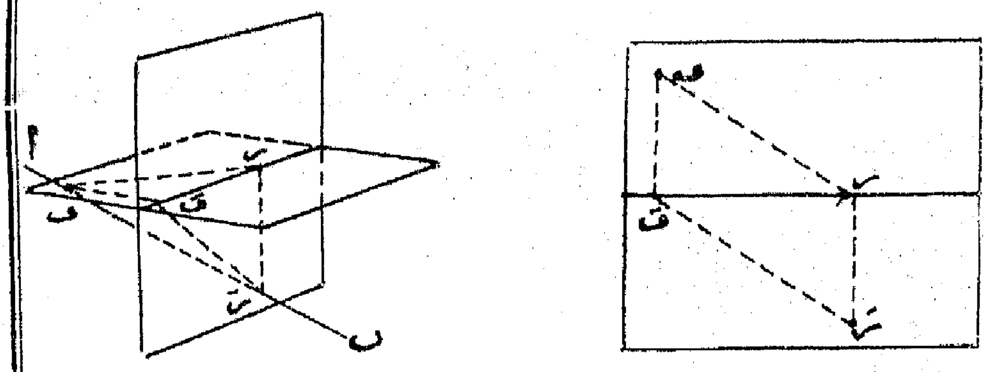
ملاحظة — بمعلومية أثرى خط مستقيم الرأسى والافقى مثل ر ﻭ ف يمكن ايجاد مسقطيه وذلك بايجاد المسقط الافقى للاثر الرأسى وهو ر على خط الارض والمسقط



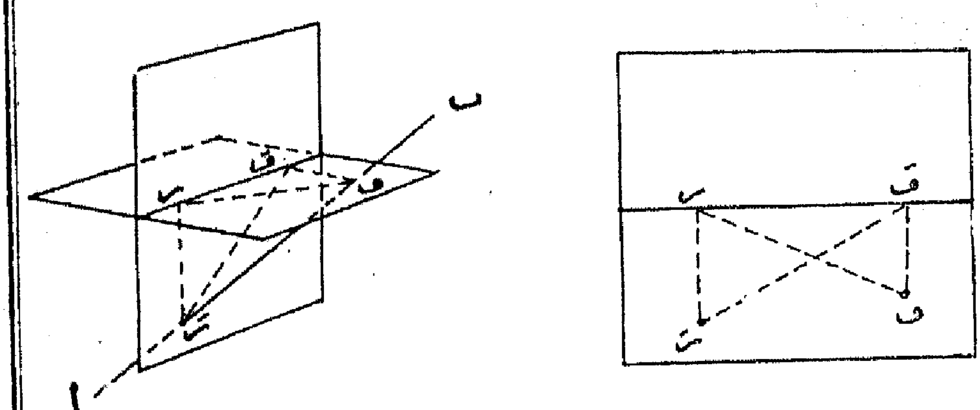
شكل
(٤٢)



شكل
(٤٣)



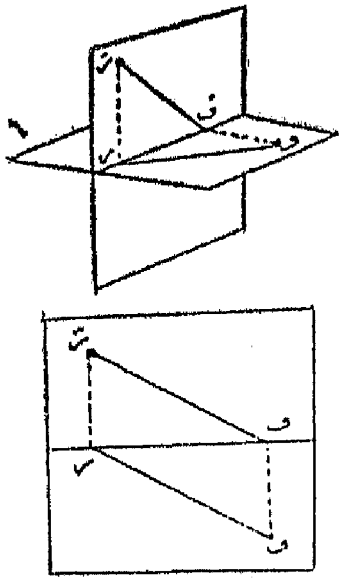
شكل
(٤٤)



شكل
(٤٥)

الرأسي للأثر الافقي وهو فَ على خط الارض فيكون تَ فَ هو المسقط الرأسي للخط المذكور و ت ف هو المسقط الافقي له كما هو مبين بشكل (٤٦)

**مسألة ٣** — معلوم مسقطا خط مستقيم الافقي والرأسي والمطلوب تعيين نقطة عليهما تبعد عن احدى نهايتي المستقيم المعلوم ببعد معين

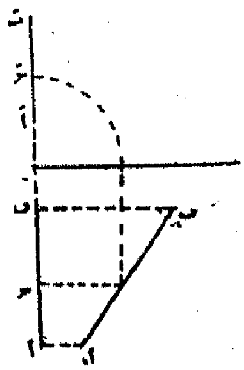


( شكل ٤٦ )

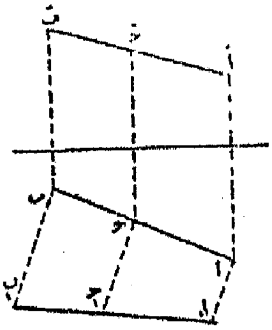
**المفروض** أن ا ب و آ بَ هما مسقطا الخط ا ب

**والمطلوب** تعيين مسقطي نقطة مثل حـ عليه بحيث يكون بعدها عن نهايته ا هو بعد معين شكلي ٤٧ و ٤٨

**العمل** نأتي بالطول الحقيقي للخط ا ب باحدى الطريقتين المعلومتين في مسألة (١) ولتكن طريقة الانطباق كما هو واضح في الشكل وليكن ا، ب، ثم نأخذ على هذا الطول البعد المعين ابتداء من النقطة ا، وليكن ا، حـ، فتكون النقطة حـ، هي حقيقة النقطة حـ بعد الانطباق



شكل ( ٤٨ )



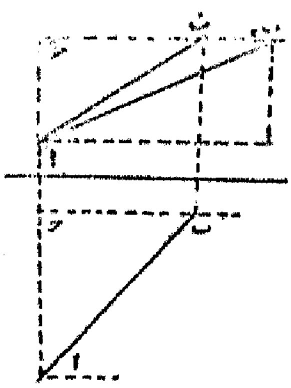
شكل (٤٧)

فاذا رسمنا من حـ، عمودا على ا ب مثل حـ، حـ تكون نقطة حـ هي المسقط الافقي للنقطة حـ وتكون حَ على آ بَ هي مسقطها الرأسي

**ملاحظة** — (الشكل ٤٧ ) يبين مسقطي مستقيم أيا كان ( مائل على مستويي المسقط ) ( والشكل ٤٨ ) يبين حالة خاصة له وهو عمود على خط الارض وفيها يكون مسقطا المستقيم ا ب عموديين على خط الارض

مسألة ٤ ـ معلوم الطول الحقيقى لخط مستقيم وبعدا كل من نهايتيه عن كل من مستويي المسقط والمطلوب رسم مسقطيه الافقى والرأسى

المفروض : أن ا ، اَ ( شكل ٤٩ ) هما المسقطان الافقى والرأسى للنقطة ا احدى نهايتى الخط المفروض ا ب وان المسقط الافقى لنهايته ب يقع على المستقيم ب حـ الموازى لخط الارض ويبعد عنه ببعد النقطة ب عن المستوى الرأسى ومسقطها الرأسى على المستقيم حـَ بَ الموازى لخط الارض ويبعد عنه ببعد النقطة ب عن المستوى الافقى



شكل ( ٤٩ )

العمل ـ نركز فى نقطة اَ وببعد يساوى اَ ب٢ وهو الطول الحقيقى للمستقيم المفروض ا ب ونرسم قوساً يقطع المستقيم حـَ بَ فى نقطة ب٢ ونصل اَ ب٢ فيمكننا اعتبار الخط اَ ب٢ هو المسقط الرأسى المستقيم ا ب بفرض انه دار ووازى المستوى الرأسى وعلى هذا يكون الطول حـَ ب٢ هو طول المسقط الافقى له قبل الدوران وبعده

فاذا ركزنا فى ا وبطول يساوى المسقط الافقى حـَ ب٢ ورسمنا قوساً يقطع الخط حـ ب فى نقطة ب تكون النقطة ب هى المسقط الافقى لنهاية الخط ا ب ويكون ا ب هو المسقط الافقى له .

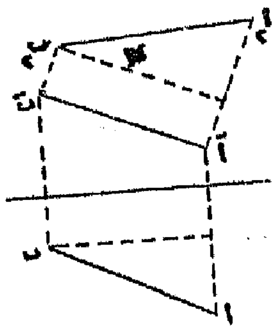
وحيث أن المسقط الرأسى للنقطة ب واقع على حـَ بَ٢ فنرسم من ب عمودا على خط الارض ونمده حتى يلاقى حـَ ب٢ فى نقطة بَ تكون هى المسقط الرأسى للنقطة ب ويكون اَ بَ هو المسقط الرأسى للخط ا ب وهو المطلوب

مسألة ٥ ـ المعلوم مسقط خط مستقيم على أحد مستويى المسقط وزاوية ميله على هذا المستوى وبعد نقطة منه عن نفس المستوى والمطلوب ايجاد مسقطه الآخر

المفروض : المسقط الرأسى للخط ا ب وليكن اَ بَ وميل هذا الخط على المستوى الرأسى وليكن زاوية Φ وبعد النقطة ب منه عن المستوى الرأسى أيضاً ( أو بمعنى آخر معلوم المسقط الافقى للنقطة ب وهو ب )

والمطلوب رسم مسقطه الافقى ( شكل ٥٠ )

**العمل** ـ حيث أنه اذا تصورنا دوران المستقيم ا ب في الفراغ حول مسقطه الرأسى اَ بَ الى أن ينطبق على المستوى الرأسى فيكون ن هو واحداثي نهايتيه شبه منحرف اَ بَ ا٢ ب٢ ويكون ا٢ ب٢ هو طوله الحقيقى والبعد بَ ب٢ هو بعد النقطة ب عن المستوى الرأسى ويكون اَ ا٢ هو بعد النقطة ا عن المستوى الرأسى ويكون ميل ا٢ب٢ على المسقط الرأسى اَ بَ يساوى ميله على المستوى الرأسى Φ



( شكل ٥٠ )

اذاً نرسم من بَ عمودا على اَ بَ ونأخذ عليه بعد النقطة ب عن المستوى الرأسى وليكن بَ ب٢ ومن اَ عمودا على اَ بَ أيضاً ثم نرسم خطا من ب٢ يميل على اَ بَ بالزاوية Φ الى أن يقابل العمود من اَ فى نقطة ا٢ يكون ا٢ ب٢ هو طول الخط الحقيقى ويكون اَ ا٢ هو بعد النقطة ا عن المستوى الرأسى

فاذا رسمنا عمودا من اَ على خط الارض وأخذنا عليه بعدا يساوى اَ ا٢ تحت خط الارض الى ا ينتج أن النقطة ا هى المسقط الافقى للنقطة ا

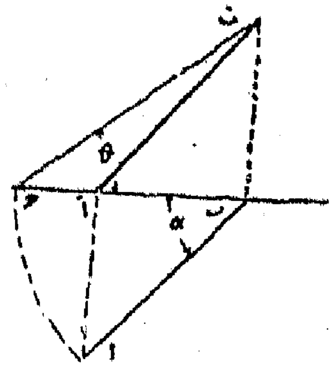
ويكون ا ب هو المسقط الافقى للخط ا ب وهو المطلوب

**ملاحظة** ـ يمكن حل المسألة بنفس الطريقة اذا علم المسقط الافقى وميل المستقيم على الافقى وبعد نقطة منه عن المستوى الافقى أيضاً ونترك للطالب عملها بنفسه

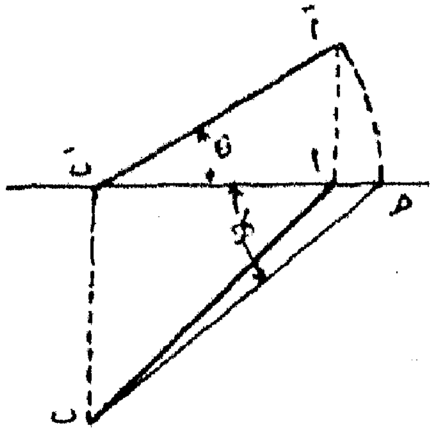
**مسألة ٦** ـ معلوم ميل خط مستقيم على أحد مستويى المسقط والزاوية التى يصنعها مسقطه على هذا المستوى مع خط الارض والمطلوب رسم مسقطيه

**المفروض** : المسقط الافقى ا ب للخط ا ب فى الفراغ وميله Θ مع المستوى الافقى مع خط الارض ( شكل ٥١ ) وميل مسقطه الافقى مع خط الارض α

والمطلوب رسم مسقطه الرأسى



شكل ( ٥١ )



شكل ( ٥٢ )

العمل ـ اذا تصورنا دوران الخط ا ب الى أن يوازى المستوى الرأسى وكانت نقطة ب منه ثابتة ونقطة ا هى المتحركة فقط وحافظة لبعدها عن المستوى الافقى فانه لا يتغير طول المسقط الافقى ويكون بعد الدوران موازيا لخط الارض أو منطبقا عليه فى حالة وجود النقطة ا على المستوى الافقى كما بالشكل (٥١)

فاذا فرضنا أن ا على المستوى الافقى يكون المسقط الرأسى لها بعد الدوران هو النقطة حـ فاذا ركزنا فى ب وبطول يساوى المسقط الافقى المفروض ا ب ورسمنا قوساً يقطع الخط الموازى لخط الارض من ب فى حـ لكان ب حـ هو المسقط الافقى للخط ا ب بعد الدوران واذا أقمنا عمودا من ب على خط الارض كانت بَ أو المسقط الرأسى للنقطة ب واقعة عليه واذا رسمنا خطا من النقطة حـ يميل مع خط الارض بالزاوية θ وهى ميل الخط مع المستوى الافقى وليكن حـ بَ لقابل العمود من ب على خط الارض فى بَ كان بَ حـ هو المسقط الرأسى للخط ا ب بعد الدوران

وحيث أن النقطة ا عند ما تحركت كان مسقطها الرأسى يتحرك على خط أفقى لانها حافظة لبعدها عن المستوى الأفقى فيكون مسقطها الرأسى قبل الدوران على الخط المرسوم من حـ موازيا لخط الأرض فاذا رسمنا عمودا من ا على خط الأرض ليقابل الخط حـ ب فى اَ كانت اَ هى المسقط الرأسى للنقطة ا قبل الدوران وكان اَ بَ هو المسقط الرأسى للخط ا ب وهو المطلوب

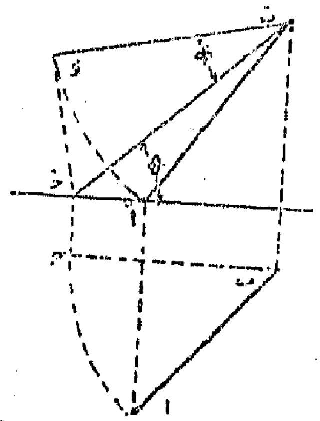
ملاحظة ١ ـــ يمكن الطالب الاستعانة على فهم العملية السابقة بالنظر الى المنظور ( شكل ٥٣ وفيه ب حـ هو المسقط الافقى للخط ا ب بعد الدوران ، حـ المسقط الرأسى

للنقطة حـ وفيه رسم الخط حـ َـَ ايقابل العمود من ب على خط الارض فى ـَ فيكون ـ َحـ هو المسقط الرأسى بعد الدوران ومن ا اقيم العمود ا اَ على خط الارض فقابل حـ اَ فى اَ وهى المسقط الرأسى للنقطة ا قبل الدوران

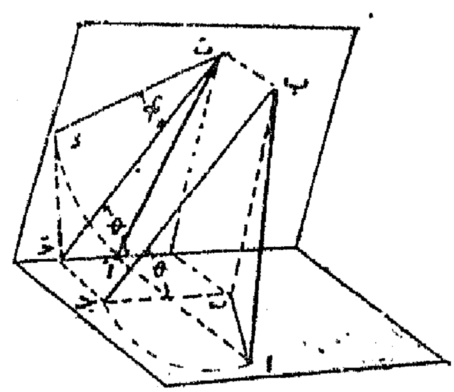
وعلى ذلك يكون اَ ـَ هو المسقط الرأسى للمستقيم اب وهو المطلوب

**ملاحظة** ٢ ـ يمكن أيضا حل المسألة السابقة اذا علم المسقط الرأسي وميل المستقيم على المستوى الرأسى وميل مسقطه الرأسى على خط الارض والشكل (٥٢) يبين طريقة العمل بوضوح

**مسألة** ٧ ـ معلوم ميل خط مستقيم على كل من مستويى المسقط وطوله الحقيقى والمطلوب رسم مسقطيه



شكل ( ٥٤ )



شكل ( ٥٣ )

**المفروض** أن θ هى ميل الخط ا ب على المستوى الافقى وان Φ هى ميله على المستوى الرأسى وأن طوله هو ا ب والمطلوب رسم مسقطيه

**العمل** ـ أولا ـ نعلم مما سبق انه اذا دار خط مستقيم الى أن يوازى المستوى الرأسى مثلا يكون مسقطه عليه يساوى طوله الحقيقى وزاوية ميل مسقطه بعد الدوران مع خط الارض هى عين زاوية ميله مع المستوى الافقى وطول مسقطه الافقى قبل الدوران هو طول مسقطه الافقى بعد الدوران

ثانيا ـ اذا دار المستقيم فى الفراغ الى أن يوازى المستوى الافقى يكون مسقطه عليه يساوى طوله الحقيقى وزاوية ميل مسقطه على هذا المستوى مع خط الأرض هى

زاوية ميله مع المستوى الرأسي وطول مسقطه الرأسي بعد الدوران هو عين طول مسقطه الرأسي قبل الدوران

ومن ذلك اذا فرضنا أنه انتخبت النقطة حـ في المنظور ( شكل ٥٣ ) لان تكون مسقطا رأسيا للنقطة ا في الفراغ بعد دوران ا ب حتى وازى المستوى الرأسي و رسمنا منها حـَ ـَ مستقيما يساوي في الطول ا ب ويميل بزاوية ميله مع المستوى الافقي θ يكون بَ حَ هو المسقط الرأسي للخط ا ب بعد الدوران ويكون احداثى ـَ حـ الافقى هو طول المسقط الأفقي لنفس الخط بعد الدوران وهو عينه طول مسقطه الافقي قبل الدوران حينئذ قد علم لنا طول المسقط الافقي للخط ا ب

وبمثل هذه الطريقة يمكننا رسم مثلث مثل ـَ حـَ ى يكون فيه ـَ حـَ الطول الحقيقي للخط ا ب ونعتبره طول مسقطه الافقي اذا دار المستقيم ا ب حتى وازى المستوى الافقي وفيه أيضا ـَ ى خط يميل بالزاوية Φ وهي ميل الخط ا ب على الرأسي والزاوية ـ ى حـ قائمة وبمعنى آخر قد اعتبرنا أن ـَ ى يمثل طول المسقط الرأسي للخط ا ب قبل الدوران و بعده

فلايجاد مسقطي الخط . ( شكل ٥٤ ) ننتخب نقطة مثل ( حـ حـَ ) لتمثل مسقطي النقطة ا بعد دوران الخط ا ب حتى وازى المستوى الرأسي ونرسم من حـَ الخط حـَ ـَ يميل بزاوية θ مع خط الارض ثم نأخذ عليه الطول حـَ ـَ يساوي الطول الحقيقي للخط ا ب فيكون حـَ ـَ هو المسقط الرأسي بعد الدوران ويكون حـ ـ هو المسقط الافقي بعد الدوران

فاذا ركزنا في ـ و بطول المسقط الافقي ورسمنا قوسا حـ ا فلابد أن هذا القوس هو المحل الهندسي للمسقط الأفقي للنقطة ا أثناء الدوران . بعد ذلك اذا رسمنا من ـَ خط ـَ ى يميل بزاوية Φ مع ـَ حـَ وليكن ـَ ى وأنزلنا من حـَ عمودا عليه وليكن حـَ ى لامكن اعتبار ـَ حـَ طول المسقط الرأسي بعد دوران الخط حتى وازى المستوى الافقي وأن الخط ـ ى هو طول مسقطه الرأسي قبل الدوران

فاذا ركزنا في ـَ وبطول يساوي المسقط الرأسي ـَ ى ورسمنا قوسا ليقطع الخط حـَ اَ الموازي لخط الارض في اَ لكانت اَ هي المسقط الرأسي للنقطة ا قبل دوران

المستقيم وموازاته للمستوى الرأسى لانها على خط أفقى مع حَ ولان الطول ـبَ اَ هو طول المسقط الرأسى قبل الدوران ولا بد أن يكون المسقط الافقى للنقطة ا على خط عمودى على خط الارض مرسوم من اَ فنرسم اَ ا عموداً على خط الارض .

وحيث أننا أثبتنا أن القوس حـ ا هو المحل الهندسى للمسقط الافقى للنقطة ا تكون نقطة تقاطع العمود مع القوس وهى ا هى المسقط الافقى للنقطة ا

ويكون ا ب هو المسقط الافقى و اَ بَ هو المسقط الرأسى للخط ا ب وهو المطلوب

مسألة ٨ — ايجاد الشكل الحقيقى لأى سطح مستو بمعلومية مسقطيه

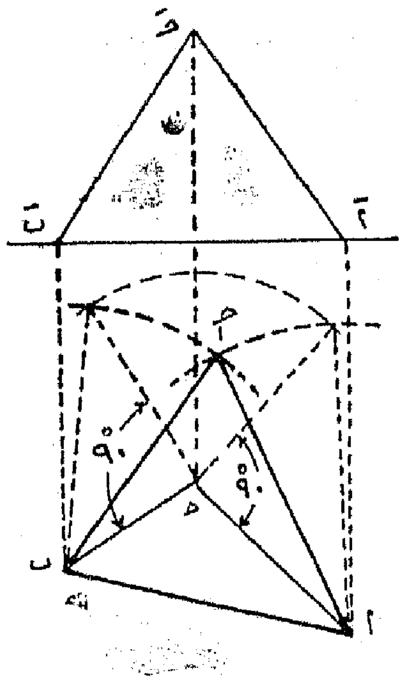
مسقط أى سطح مستو على أى مستوى لا يبين أبعاده أو شكله الحقيقى الا اذا وازى هذا السطح المستوى المسقوط عليه ففى هذه الحالة فقط يكون السطح ومسقطه واحدا .

فلبيان الشكل الحقيقى لأى سطح مستوى معلوم مسقطاه من الضرورى ايجاد المسافات الحقيقية لعدد كاف من نقطه بالنسبة لبعضها وتلك المسافات يمكننا ايجادها باحدى الطريقتين السابق ذكرهما فى (مسألة ١)

فمثلا ليكن المفروض مسقطا المثلث ا ب حـ فى الفراغ وليكن ا ب حـ هو مسقطه الافقى و اَ بَ حَ هو مسقطه الرأسى على التوالى (شكل ٥٥)

والمطلوب ايجاد الشكل الحقيقى لهذا المثلث

العمل : — نجد المسافات الحقيقية بين النقط الثلاثة ا و ب و حـ فى الفراغ وبمعنى آخر نجد الطول الحقيقى لاضلاعه الثلاثة ا ب و ب حـ و حـ ا بمعلومية مسقطى كل منها باحدى الطريقتين السابق ذكرهما ولتكن طريقة الانطباق كما هو مبين بالشكل فالمستقيم حـ, ا هو الطول الحقيقى للضلع حـ ا والمستقيم ب حـ, هو الطول الحقيقى للضلع ب حـ والمستقيم ا ب هو الطول الحقيقى للضلع ا ب




شكل ( ٥٥ )

وبذلك يمكننا رسم المثلث الحقيقى ا ب حـ, المرسوم فى الشكل وهو الشكل الحقيقى المطلوب

**ملاحظة** ( ١ ) : — اذا تكوّن السطح من أكثر من ثلاث أضلاع فيمكن تقسيمه الى مثلثات وبايجاد الاشكال الحقيقية لاضلاع تلك المثلثات يمكن تعيين الشكل الحقيقي للسطح كله

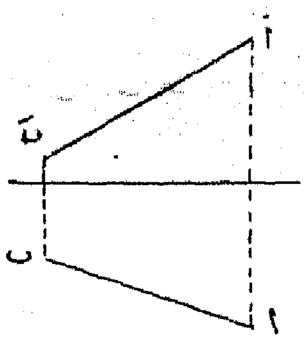
**ملاحظة** ( ٢ ) : — يستحسن لايجاد الشكل الحقيقي لأى سطح معلوم مسقطاه استعمال طريقة دوران المستوى المحتوى عليه هذا الشكل الى ان ينطبق أو يوازى أحد مستويي المسقط وسيأتي الكلام على ذلك فيما بعد عند الكلام على دوران المستويات

## ١٩ — أوضاع المستقيم فى الفراغ بالنسبة لمستويي المسقط :

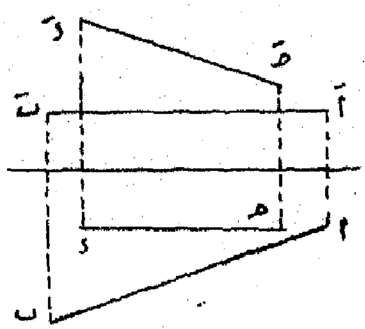
الاوضاع الاصلية للمستقيم فى الفراغ بالنسبة لمستويي المسقط سبعة وهى

أولا — عندما يكون مائلا على مستويي المسقط ويقال له مستقيم اختيارى وهنا يكون مسقطاه مائلين على خط الارض كالمستقيم ( ا ب — اَ بَ ) شكل ٥٦

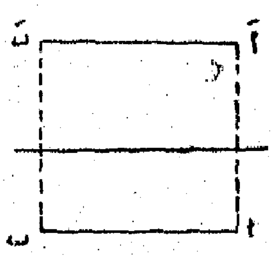
( أشكال )



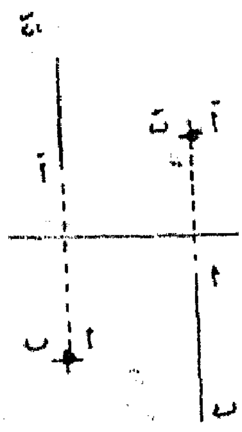
( ٥٦ )



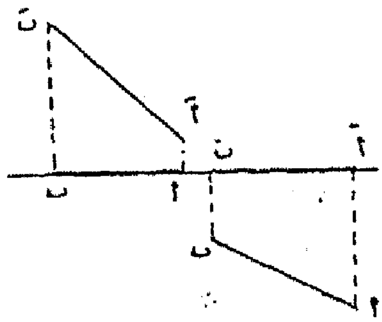
( ٥٧ )



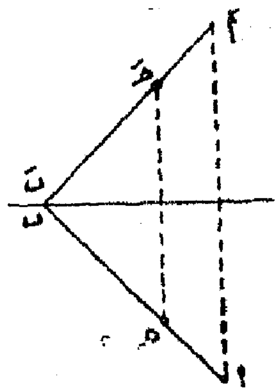
( ٥٨ )



( ٥٩ )



( ٦٠ )



( ٦١ )

ثانيا — عندما يكون موازيا لأحد مستويى المسقط ويُقال له مستقيم مواز لاحد مستويى المسقط : فاذا كان موازيا المستوى الرأسى ومائلا على المستوى الافقى يكون المسقط الرأسى له يساويه فى الطول ويميل مع خط الارض بزاوية ميل المستقيم فى الفراغ على المستوى الافقى

أما اذا كان موازيا المستوى الأفقى ومائلا على المستوى الرأسى يكون مسقطه الافقى يساوى طوله الحقيقى ويميل مع خط الأرض بزاوية ميل المستقيم فى الفراغ على المستوى الرأسى كالمستقيم ( حـ ء — حَ ءَ ) ، ( ا ب — اَ بَ ) على التوالى شكل ( ٥٧ )

ثالثا — عندما يكون موازيا لكل من مستويى المسقط وهذا اما أن يكون مسقطاه الأفقى والرأسى موازيين لخط الارض كالمستقيم ( ا ب — اَ بَ ) شكل (٥٨) وأما ان يكون منطبقين عليه فيحتوى عليهما خط الارض

رابعا — عندما يكون عمودا على احد مستويى المسقط ومواز للاخر وهذا يكون مسقطه على المستوى العمودى عليه نقطة ومسقطه على المستوى الثانى مستقيما عموديا على خط الارض ومساويا لطوله الحقيقى كـكل من المستقيمين ( ا ب — اَ بَ ) شكل ٥٩

خامساً — عندما يكون عمودا على خط الارض سواء كان هذا المستقيم متلاقيا مع خط الارض أو فى مستويى عمودى على خط الارض ولا يقابله وهذا يكون مسقطاه موجودين على مستقيم واحد عمود على خط الأرض أيضا ولا يكفيان لتعيين وضعه الحقيقى الا بمساعدة المسقط الجانبى كالمستقيم ( حـ ء — حَ ءَ ) شكلى (٤٠) ، (٤١)

سادسا — عندما يكون موجودا فى أحد مستويى المسقط فيكون مسقطه على المستوى المشتمل عليه هو نفس المستقيم ومسقطه على المستوى الثانى منطبقا على خط الارض كـكل من المستقيمين ( ا ب — اَ بَ ) ، ( حـ ء — حَ ءَ ) شكل (٦٠)

سابعا — عندما يكون متلاقيا مع خط الارض ومائلا عليه يكون مسقطاه مائلين على خط الأرض ومتلاقيين معه فى نقطة واحدة منه كالمستقيم ( ا ب — اَ بَ ) شكل ( ٦١ )

## ٢٠ — شرط وجود النقطة الفراغية على المستقيم أو على أحد مسقطيه

توجد النقطة الفراغية على مستقيم ما متى كان مسقطاها موجودين على مسقطى ذلك المستقيم على التناظر فالنقطة حـ (شكل ٦١) اذا وجدت على المستقيم ا ب يكون مسقطها الافقى حـ على المسقط الافقى ا ب للخط ا ب ومسقطها الرأسى حـَ على المسقط الرأسى اَ بَ لهـذا الخط وتكون حـ و حـَ من تعريف مسقطى أى نقطة واقعتين على خط مستقيم واحد عمود على خط الارض

وبناء على هـذا اذا أريد تحديد نقطة ما على أى مستقيم معلوم يكفى معرفة مسقط واحد لها على أحد مسقطى المستقيم المعلوم ويمد منها مستقيم عمودى على خط الارض ليقابل المسقط الآخر للمستقيم فى نقطة تكون هى المسقط الثانى للنقطة

## ٢١ — أوضاع المستقيم بالنسبة لمستقيم آخر فى الفراغ

أولا — اذا تقاطع المستقيم مع مستقيم آخر وكان مستويهما مائلا على كل من مستويى المسقط

فمثلا اذا تقاطع المستقيمان ا ب و حـ ء معاً فى نقطة مثل و شكل (٦٢) وكان مستويهما مائلا على كل من مستويى المسقط فان نقطة تقاطعهما و تقع على كل من المستقيمين . والمسقط الافقى لها لا بد وان يقع على كل من المسقطين الافقيين المستقيمين وليكن و وبالمثل المسقط الرأسى لها يقع على كل من المسقطين الرأسيين لها وليكن وَ ويؤخذ من ذلك ان المسقط الافقى لنقطه التقاطع و هى نقطة تقاطع المسقطين الافقيين المستقيمين وكذا المسقط الرأسى لتلك النقطة هى نقطة تقاطع المسقطين الرأسيين لها وان كل من المسقط الافقى والرأسى لهذه النقطة يكونان على خط مستقيم واحد وَ و عمودى على خط الارض

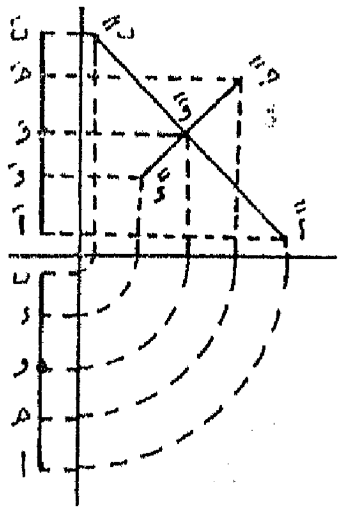
ثانياً — اذا تقاطع المستقيم مع مستقيم آخر وكان مستويهما عموداً على أحد مستويى المسقط

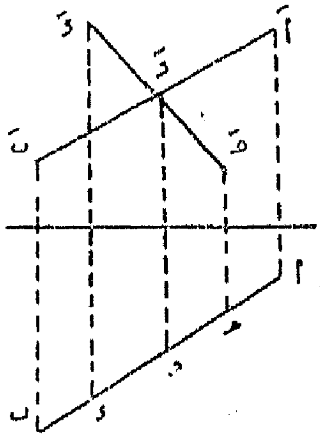
فمثلا اذا تقاطع المستقيمان ا ب و حـ ء فى نقطة و شكل ٦٣ وكان مستويهما عموديا على المستوى الافقى ومائلا على المستوى الرأسى فان مسقطيهما الرأسيين يكونان متقاطعين ومسقطيهما الافقين يكونان منطبقين والمسقط الرأسى لنقطة تقاطعهما وَ هى نقطة تقاطع

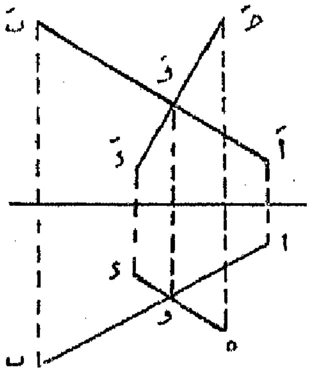
المسقطين الرأسيين ومسقطها الافقى على خط مستقيم عمودى على خط الارض من مسقطها الرأسى وواقع على المسقطين الافقيين المنطبقين

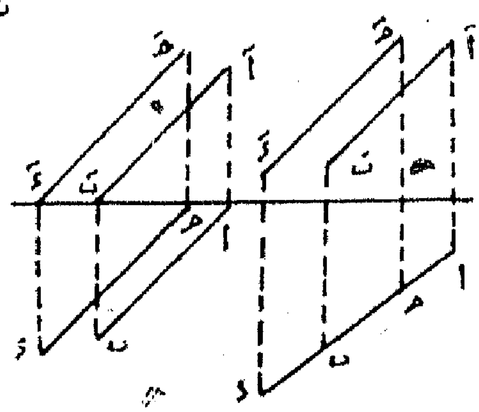
( أشكال )

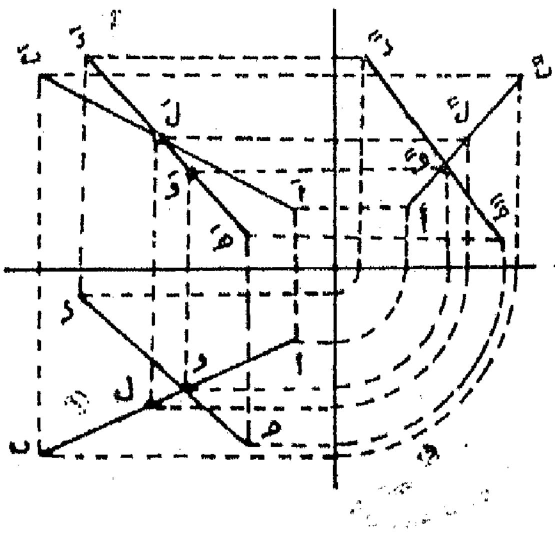
(٦٤) (٦٣) (٦٢)











(٦٦) (٦٥)

ثالثاً — اذا تقاطع المستقيم مع مستقيم آخر وكان مستويهما عمودا على خط الارض فمثلا اذا تقاطع المستقيمان اب و حء فى نقطة مثل و ( شكل ٦٤ ) وكان مستويهما عموديا على خط الارض ففى هذه الحالة لا يمكن تعيين نقطة تقاطعهما الا بمساعدة المستوى الجانبى كما بالشكل ومنه يتضح اسقاطهما عليه وطريقة ايجاد نقطة التقاطع

**ملاحظة** : — وعلى ذلك اذا وُجد مسقط خطين أياً كانا على مستوى المسقط

ووجد أن نقطة تقابل مسقطيهما الرأسيين ليست على مستقيم واحد عمودى على خط الارض مع نقطة تلاقى مسقطيهما الافقيين فلا يكون هذان المستقيمان متلاقيين فى الفراغ كما هو واضح ( بشكل ٦٥ )

أما فى الحالة الثانية والثالثة فلا يمكن الجزم بصحة هذه الملاحظة الا من المسقط الجانبى

رابعاً — اذا وازى مستقيم مستقيما آخر.

وفى هذه الحالة يكون مسقطاهما على كل من مستويى المسقط متوازيان فاذا فرض أنه المراد رسم مسقطى خط مستقيم يمر بنقطة معلومة مثل ( حـ حـَ ) ويوازى مستقيماً آخر معلوم مسقطاه مثل ( ا ب ، اَ بَ ) فيرسم من المسقط الافقى للنقطة وهو حـ خط حـ ء يوازى ا ب ومن المسقط الرأسى لها وهو حـَ خط حـَ ءَ يوازى اَ بَ فيكون ( حـ ء ، حـَ ءَ ) هما مسقطا الخط المستقيم المطلوب ويكون بذلك كل من مسقطى الخطين ( ا ب ، حـ ء ) على كل من مستويى المسقط متوازيين كما فى ( شكل ٦٦ )

**مسألة ٩** : المعلوم مسقطا كل من خطين متقاطعين والمطلوب ايجاد الزاوية بينهما

**المفروض** : أن ( ا ب ، اَ بَ ) ، ( ا حـ ، اَ حـَ ) هى مساقط الخطين المستقيمين ا ب ، حـ ء المتقاطعين فى الفراغ ( شكل ٦٧ )

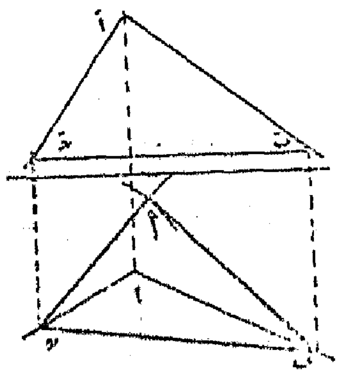
**والمطلوب** تعيين مقدار الزاوية بينهما ب ا حـ

**العمل** : — نرسم الخط بَ حـَ موازياً لخط الارض ليقطع المسقطين الرأسيين للخطين فى بَ ، حـَ

ثم نأتى بمسقطى النقطتين بَ ، حـَ الافقيين وليكونا ب ، حـ على المسقطين الافقيين للخطين ثم نصل ب حـ فيكون هو الطول الحقيقى للخط ب حـ ثم نأت بالطول الحقيقى للخطين ا ب ، ا حـ ونرسم المثلث ا ب حـ المحتوى على الاطوال الحقيقية للخطوط الثلاثة

فتكون الزاوية ب ا حـ هى الزاوية المطلوبة

**البرهان** : — بما أننا كونا مسقطاً رأسياً وأفقياً لمثلث واتينا باضلاعه الحقيقية ورسمناه فيكون هو الشكل الحقيقى للمثلث ا ب حـ وتكون الزوايا التى



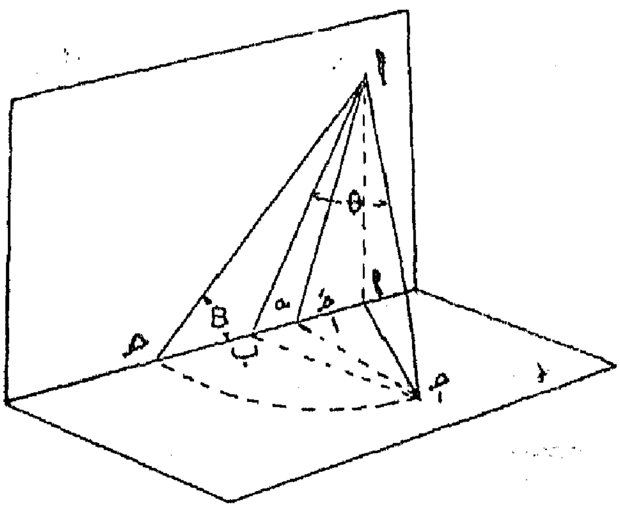
( شكل ٦٧ )

بين أضلاعه حقيقة وتكون الزاوية ب ا حـ هى الزاوية المطلوبة ( شكل ٦٧ )

**مسألة ١٠ :** — ايجاد مسقطى خطين مستقيمين متلاقين مع بعضهما فى الفراغ ويصنعان مع بعضهما زاوية معلومة وكل منهما يميل على أحد مستويى المسقط بزاوية معلومة أيضا

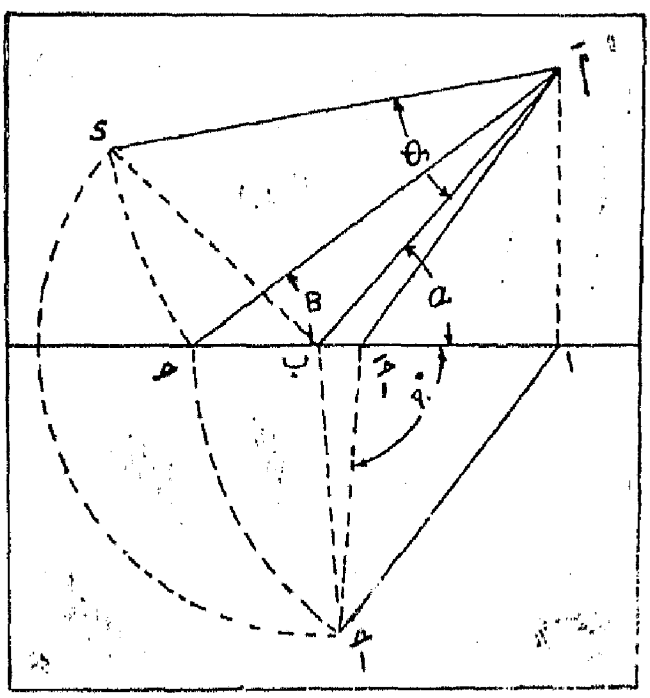
**المفروض :** المستقيمان ا ب ، ا حـ المتلاقيان فى الفراغ الشكل المنظور (٦٨) وان ا ب يميل بزاوية $\alpha$ مع المستوى الافقى ، ا حـ يميل بزاوية $\beta$ مع نفس المستوى وان كل من حـ ، ب فى المستوى الافقى وان زاوية ب ا حـ $= \theta$

( شكل ٦٨ )




والمطلوب ايجاد مسقطى المستقيمين ا ب ، ا حـ على كل من مستويى المسقط.

**العمل :** — من النقطة اَ ( شكل ٦٩ ) فى المستوى الرأسى نرسم اَ ب ، اَ حـ يصنع كل منهما الزاوية $\alpha$ والزاوية $\beta$ مع خط الارض على التوالى ثم نرسم اَ ء مساويا الى ا حـ ويصنع مع ا ب الزاوية $\theta$ ثم نصل ء ب يكون ا ء ب هو الشكل الحقيقى لمثلث منطبقا على المستوى الرأسى ومحتويا على الطول الحقيقى لكل من الخطين المفروضين ا ب ، ا ء وهما اَ ب ، اَ ء بقى علينا ان نرجع المثلث اَ ب ء الى




( شكل ٦٦ )

وضعه فى الفراغ قبل انطباقه على المستوى الرأسى ولذلك نقول انه بما ان آ ب مرسوم بطوله الحقيقى مع المستوى الافقى $\alpha$ يكون ا ب هو طول مسقطه الافقى قبل الدوران

وكذا ا حـ هو المسقط الافقى للخط ا حـ قبل الدوران فما علينا الا ان نركز فى ا وبفتحه تسارى ا حـ ونرسم قوسا فتقع النقطة حـ، وهى المسقط الافقى للنقطة حـ عليه وحيث أن كل من ب و حـ فى المستوى الافقى فرضا يكون طول المسقط الافقى للخط ب حـ واحدا قبل الدوران وبعده حينئذ اذا ركزنا فى النقطة ب وبفتحة تساوى ب ى وهو طول المستقيم ب حـ قبل الدوران وبعده ورسمنا قوسا يقطع القوس الاول المرسوم من ا فى النقطة حـ، تكون هذه النقطة هى المسقط الافقى للنقطة حـ قبل الدوران ويكون ا حـ، المسقط الافقى للخط ا حـ و اَ حـَ، المسقط الرأسى له وكذا ا ب هو المسقط الافقى للخط ا ب و آ ب هو المسقط الرأسى له أيضا وهو المطلوب

## تمرينات (١)

## على مساقط النقط والخطوط فى الفصل الثانى

(١) ارسم مساقط النقط الآتية مستعملا خط أرض واحد لجميع المساقط

نقطة ا أمام المستوى الرأسى وتبعد عنه ٣ س م وفوق المستوى الافقى وتبعد عنه ٤ س م

نقطة ب أمام المستوى الرأسى وتبعد عنه ٥ س م وتحت المستوى الافقى وتبعد عنه ٤,٥ س م

نقطة حـ امام المستوى الرأسى وتبعد عنه ٣,٥ س م وموجوده على المستوى الافقى

نقطة ى خلف المستوى الرأسى وتبعد عنه ٥,٥ س م وفوق المستوى الافقى وتبعد عنه ٣,٥ س م

نقطة هـ موجودة فى المستوى الرأسى وفوق المستوى الافقى وتبعد عنه ٣ س م

(٢) ارسم مساقط النقط الآتيــة على خط أرض واحد مبينا الزاوية الزوجيــة لمستويى المسقط الموجود فيها كل منها

نقطة ا تبعد عن المستوى الرأسى ٢,٥ س م وعن المستوى الافقى ٤ س م

» ب » » » » — ٣ س م » » » ٢,٥ س م

» حـ » » » » — ٢,٥ س م » » » — ٢,٥ س م

» ى » » » » ٣ س م » » » — ٣ س م

» هـ » » » » ٤ س م وموجودة على المستوى الافقى

» و موجودة فى المستوى الرأسى وتبعد عن المستوى الأفقى ٤ س م

» ر موجودة فى كل من مستويى المسقط

(٣) رَ ى ف هما الأثران الرأسي والافقي للخط ا ب ( شكل ٤٢ ) ى ر ى ف هما مسقطاهما ى ف فَ = ١ ¼ ى فَ ر = ١ ½ ى رَ ر = ٢ ارسم مسقطى ا ب في الزوايا الاربع

(٤) ا ى ب ى حـ ى ء هي أربع نقط في الفراغ كل منهـا في زاوية من الزوايا الزوجية الاربعة انظر شكلي (٣٣) ى (٣٤) وابعاد تلك النقط مأخوذة على التوالي عن المستوى الافقي هي ١ ى ¾ ى ½ ى ١ ¼ وابعادها عن المستوى الرأسي هي على التوالي أيضا ¾ ى ½ ى ١ ى ⅝ والمسافة من اَ الى بَ ( شكل ٣٤ ) = ١ ومن بَ الى حـَ = ١ ½ ومن حـَ الى ءَ = ١ ¼ أوجـد مساقط وأثرات كل من الخطوط التي يمكن رسمها بين كل من نقطتين من النقط المذكورة

(٥) ارسم مسقطى خط مستقيم طوله ٥ سم في كل من المواضع الآتية :

أولا — اذا كان موازيا لـكل من مستويي المسقط وفوق المستوى الافقي بمقدار ٢ ½ س م وأمام المستوى الرأسي بمقدار ٤ س م ( اى مقدار البعد عنه )

ثانيا — اذا كان أفقيا ويميل على المستوى الرأسي بزاوية ٣٠°

ثالثا — اذا كان مائلا على المستوى الافقي بمقدار ٣٠° ومسقطه الافقي يصنع ٤٥° مع خط الارض

(٦) ارسم مساقط الخطوط الآتية ثم اوجد أثرى كل منها ان أمكن

(١) ا ب طوله ٥ س م مواز لخط الارض ويبعـد ٢٫٥ س م عن المستوى الافقي ى ٣٫٥ س م عن المستوى الرأسي

(٢) حـ ء طوله ٥٫٥ س م ومواز للمستوى الافقي ويميل ٣٠° على المستوى الرأسي ونهايتـه حـ موجودة على المستوى الرأسي وتعلو بمقـدار ٣ سنتيمترا عن المستوى الافقي

(٣) هـ و طوله ٥ س م عمودى على المستوى الرأسي ويعلو بمقدار ٢٫٥ س م عن المستوى الافقي ونهايته هـ تبعد عن المستوى الرأسي بمقدار ١٫٢٥ س م

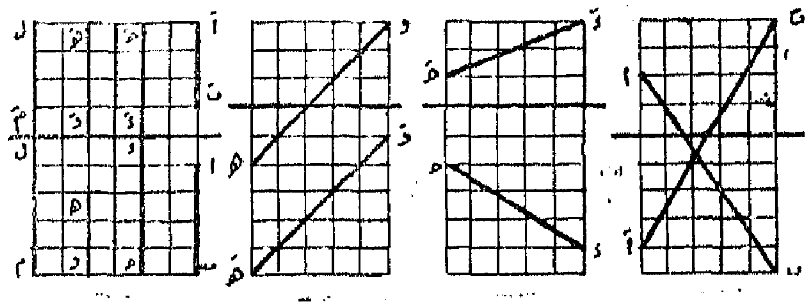
(٧) طول المسقط الافقي لخط مستقيم هو ٥ س م ويميـل هذا المسقط ٣٥°

على خط الأرض ويميل مسقطه الرأسى ٤٥° مع خط الأرض والخط نفسه يقطع خط الارض . ارسم المسقط الرأسى للخط ثم اوجد طوله الحقيقى وميله على كل من مستويى المسقط

(٨) اوجد الطول الحقيقى وميل واثرى كل من الخطوط المبين مسقطى كل منها فى الاشكال ا ، ب ، حـ ، ى شكل (٧٠)

وبين أيضا فى كل حالة مسقطى نقطة على الخط بعدها الحقيقى من نهايته السفلى هو ٢ س م

شكل (٧٠)

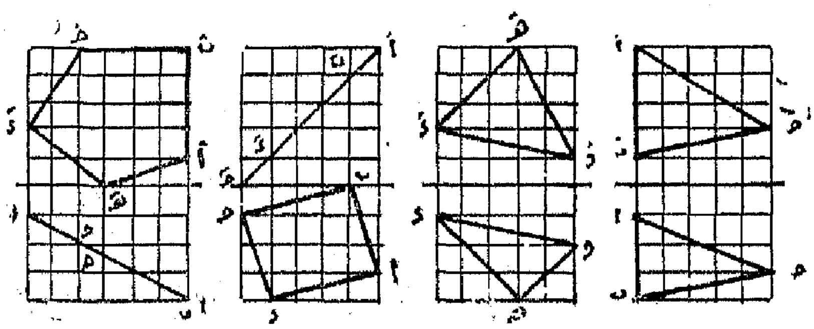


ى حـ ب ا

(٩) اَ بَ وطوله ٦٫٢٥ س م هو المسقط الرأسى لخط مستقيم ا ب مواز للمستوى الرأسى ونهايته ا موجودة فى المستوى الافقى وعلى بعد ٢٫٥ س م من المستوى الرأسى ونهايته الأخرى ب تعلو عن المستوى الأفقى ٣٫٧٥ س م ارسم المسقط الرأسى والأفقى للخط ا ب

(١٠) اوجد الشكل الحقيقى لمساقط السطوح المبينة بالاشكال ( من ا الى ى شكل (٧١ ) واوجد ايضا فى كل شكل أثرى كل ضلع من اضلاعه اذا أمكن

شكل (٧١)



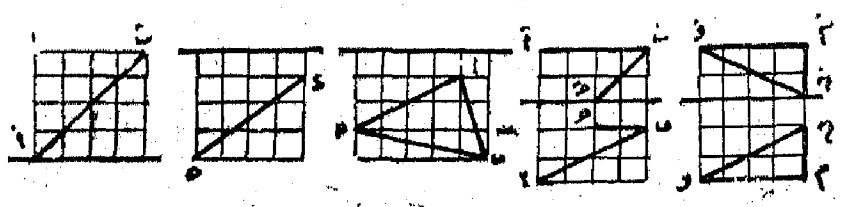
ى حـ ب ا

(١١) اَ بَ هو المسقط الرأسى لخط مستقيم ( شكل ٧٦ ) ونهايته موجودة

فى المستوى الرأسى والخط يميل بزاوية مقـدارها ٣٥° مع المستوى الافقى ارسم المسقط الافقى لهذا الخط

(١٢) حـ ى هو المسقط الافقى لخط مستقيم طوله الحقيقى ٧٫٥ س م ونهايته حـ تحت المستوى الأفقى بمقدار ١ س م ونهاية ى فوق المستوى الافقى ( شـكل ٧٥ ) ارسم المسقط الرأسى له

(١٣) ا ب حـ ( شـكل ٧٤ ) هو المسقط الافقى المثلث ا ب حـ والنقطة ا موجودة على المسـتوى الافقى والنقطة ب فوق المسـتوى الافقى وتعـلو عن النقطة الثالثة حـ والطول الحقيقى للخط ا ب هو ٦٫٢٥ س م وميل الخط ب حـ مع المستوى الافقى هو ٤٠° والمطلوب رسم المسـقط الرأسى للمثلث وايجاد الطول الحقيقى للخط ا حـ



٧٦ ٧٥ ٧٤ ٧٣ ٧٢

(١٤) خط مستقـيم طوله ٧٫٥ سم ونقطة منتصـفة تعلو بمقدار ٢٫٥ س م عن المستوى الافقى وتبعد بمقـدار ٣ س م عن المستوى الرأسى وأن الخط يميل ٣٠° مع المستوى الافقى و ٤٠° مع المستوى الرأسى والمطلوب رسم مسقطيه

(١٥) اوجد الزاوية الحقيقية بين المستقيمين المتقاطعين اَ بَ حَ و ا ب حـ (شكل ٧٣ ) ثم اوجد مسقطى الخط المنصف للزاوية ا ب حـ

(١٦) بيّن المقدار الحقيقى للزاوية م و ن فى المثلث المبيّن مسقطاه فى (شكل ٧٢) ثم ارسم مسقطى الخط الذى يمر بالنقطة م ويقطع و ن فى زاوية قائمة

**ملاحظة** : — عند تمثيل المربعات الموجودة فى الاشكال من نمرة ٧٠ الى نمرة ٧٦ يؤخذ ضلع المربع فيها مساوياً الى سنتيمتر واحد

(١٧) ارسم المسقط الافقى لزاوية مقدارها ٦٠° عند ما يكون الخطان المحتويان عليها يميلان بزاوية ٣٠° و ٤٥° على التوالى مع المستوى الافقى

(١٨) ا ب حـ مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٥سم ونقطة ا منه واقعة فى المستوى الافقى و ب فى المستوى الرأسى و ا ب يميل ٤٥° مع المستوى الافقى و ٣٠° مع المستوى الرأسى و ب حـ يميل ٣٥° مع المستوى الافقى ارسم مسقطيه الرأسى والافقى

انظر حل أغلب هذه المسائل بلوحة نمرة ١ و نمرة ٢

# الفصل الرابع

## فى مساقط الاجسام فى ابسط اوضاعها فى الفراغ

**مقدمة** :— تكلمنا فى الفصل الثانى من الهندسة الفراغية عن الاجسام وانواعها هندسيا وفى الفصل الثالث ان علم الهندسة الوصفية هو الفرع الهندسى الذى يبحث عن تمثيل الاجسام ذات الابعاد الثلاثة ( وهى الطول والعرض والسمك ) على اسطح مستوية بواسطة اشكال لها طول وعرض فقط

والآن اثباتاً لذلك نقول ان الجسم يمكن اعتباره متكوّنا من عناصر صغيرة أو نقط مادية لاعدد لها وان مواضع كل منها بالنسبة لبعضها يمكن تمثيله بواسطة اسقاطها على مستويين كمستوبى المسقط كما وضح فى البنود السابقة من الهندسة الوصفية

وحيث أنه عند مشاهدة أى جسم تظهر أمامنا نقط أسطحه الخارجة فقط وتلك النقط وحدها هى التي تعطينا الفكرة عن شكل وحجم ذلك الجسم المتكون من امتداد تلك الاسطح فليس من الضرورى اذاً عند تمثيل أى جسم ان نبين مساقط نقطه الداخلة بل يمكن الا كتفاء باسقاط الخطوط التى تحد اسطحه الخارجة فقط

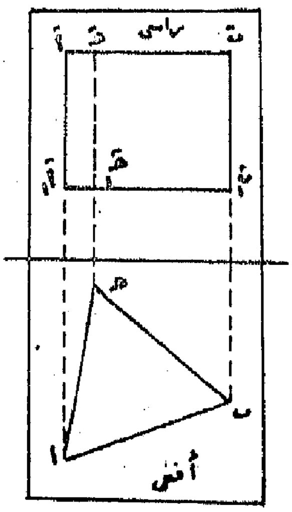
اما اذا كان من الضرورى معرفة تفصيلات عن تكوين الجسم من الداخل فلا بد من تمثيل عدة نقط أو خطوط مهمة داخلية فيه بواسطة مساقطها وسيأتى الكلام على ذلك فى القطاعات فيما بعد

وقد علمنا مماسبق انه بطريقة المساقط يمكننا تعيين الاشكال الحقيقية واطوال ومواضع تلك الخطوط بالنسبة لبعضها وتمثيلها على اسطح مستوية إذاً فمن السهل بواسطة تلك الطريقة وهى « طريقة المساقط » تمثيل إى جسم على اسطح مستوية باسقاط عدد كاف من الخطوط التى تحد اسطحه سواء كانت تلك الاسطح هى اسطحه الخارجه أو الخارجة والداخلة معا وذلك حسب المراد

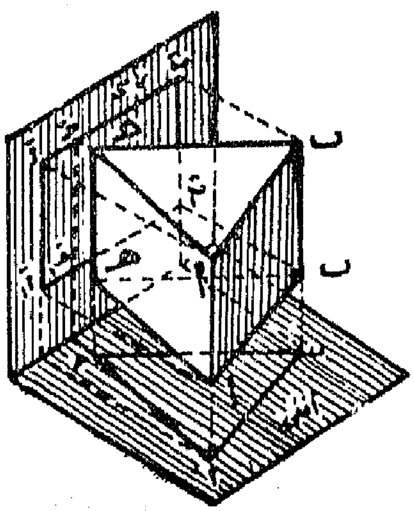
## مسألة ١١ — طريقة رسم المسقطين الرأسى والافقى للمنشور

مسقطا المنشور فى أبسط أوضاعه هما عند ما تكون احدى قاعدتيه موازية لأحد مستويى المسقط وفى هذه الحالة يكون مسقطها عليه هو شكلها الحقيقى . وبما أنه من المفروض اعطاء شكل القاعدة الحقيقى فيمكن اعتباره احد مسقطى المنشور

فاذا كان المنشور قائما وكانت قاعدتاه موازيتين للمستوى الافقى كما فى (٧٧) ينطبق مسقطا قاعدتيه على بعضهما ويكوّنان معاً المسقط الافقى المنشور وهو المثلث اسحـ ويكون المسقط الرأسى للقاعدتين خطين موازيين لخط الارض مثل اَ ـَ ، اَ١ ـَ١ ويبعدان عن بعضهما بمقدار ارتفاع المنشور

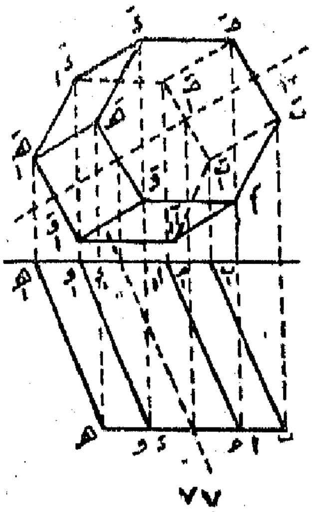


شكل ٧٨



شكل ٧٧

وهو ـَ١ ـَ مثلا ويكون المسقط الرأسى لقاعدته هو اَـَحـَ ، اَ١ ـَ١ حـَ١ ويكون مساقط احرفه اذاً هى الخطوط الرأسية الواصلة من اركان قاعدتيه كل الى نظيره وهى اَ اَ١ ، ـَ ـَ١ ، حـَ حـَ١ وذلك مبين بالشكلين (٧٧) ، (٧٨)



شكل ٧٩

وشكل (٧٩) يبين مسقطى منشور سداسى مائل عند ما تكون قاعدتاه موازيتين للمستوى الرأسى وفى هذه الحالة يرسم المسقط الرأسى أولا لقاعدة واحدة لانه يبين الشكل الحقيقى للقاعدة المذكورة وبمساعدة ميل المحور وطوله أو ارتفاع المنشور يمكن رسم المسقط الافقى

وتكملة المسقط الرأسي المنشور أيضا فيكمل المسقطان كما بالشكل

**ملاحظة:** (١) يلاحظ أنه في الشكل (٧٨) وفي المسقط الرأسي المنشور الثلاثي أن أحد أحرفه وهو حَ حَ، ممثل بخط شعاعي وانه في الشكل (٧٩) المسقط الرأسي لخمسة أحرف من المنشور السداسي المائل ممثلة بخطوط شعاعية

والسبب في ذلك ان تلك الاحرف مختبئة بواسطة الجزء الامامي من الجسم فاذا اختبأ أي حرف من أي جسم عند النظر اليه من الامام يكون مسقطه الرأسي شعاعيا واذا اختبأ عند النظر اليه من أعلا أو بمعنى آخر عند اسقاطه على المستوى الافقي يكون مسقطه الافقي شعاعيا أيضا

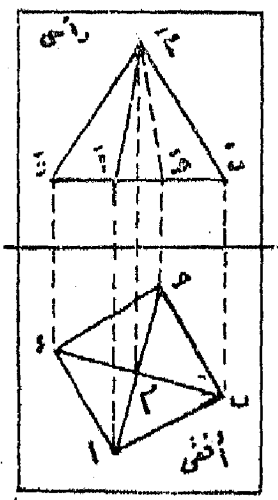
(٢) يلاحظ أيضا أنه عند ماينطبق مسقط أي حرف ظاهر على مسقط حرف آخر مختبيء يمثل فقط الحرف الظاهر بخط كامل ( متصل أو غير شعاعي )

## مسألة ١٢ — طريقة رسم مسقطي الهرم

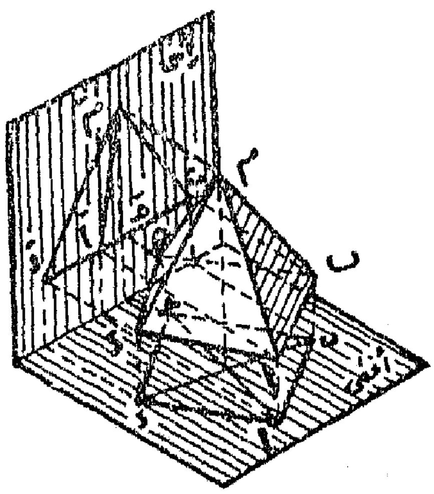
مسقطا الهرم في أبسط أوضاعه هما عند ماتكون قاعدته موازية لاحد مستويي المسقط

والشكل (٨١) يبين مسقطي هرم رباعي في أبسط أوضاعه بمعلومية الشكل الحقيقي لقاعدته وميل أحد أضلاعها على المستوى الرأسي وفيه المسقط الافقي ا ب حـ ى يبين الشكل الحقيقي لقاعدته المفروضة والمفروض ميل أحد أضلاعها ا ب مثلا على المستوى الرأسي

ومركز القاعدة م يبين المسقط الافقي لرأس الهرم اذا كان قائما ومنه ترسم خطوط مستقيمة الى أركان القاعدة ا م، ب م، حـ م، ى تبين المساقط الأفقية لأحرف أوجهه الجانبية




شكل ( ٨١ )




شكل ( ٨٠ )

وفى المسقط الرأسى يظهر مسقط القاعدة خطا مستقيما اَ بَ حَ ىَ وبمعلومية ارتفاع الهرم يمكن ايجاد المسقط الرأسى لرأسه مَ وتتكون المساقط الرأسية لأحرف أوجهه بتوصيل مَ الى اَ ، بَ ، حَ ، ىَ فيكون مَ اَ بَ حَ ىَ هو المسقط الرأسى للهرم والشكل (٨٠) يبين منظور ذلك الهرم مع مسقطيه الافقى والرأسى .

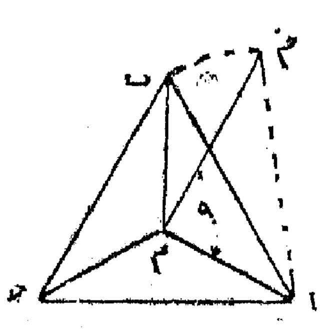
**مسألة ١٣ — طريقة رسم مساقط كثير السطوح ذى الاربعة أوجه المنتظم**

كثير السطوح ذو الاربعة أوجه المنتظم هو فى الحقيقة هرم ثلاثى أوجهه متساوية ومساوية للقاعدة فلايجاد مسقطيه يكتفى بمعرفة شكل احد أوجهه وطريقة رسمه هى نفس طريقة رسم الهرم الرباعى السابقة الذكر فقط يتعين علينا ايجاد ارتفاعه بالطريقة الآتية بعد

فاذا علم مقدار الارتفاع يكون المسقط الافقى هو الشكل الحقيقى لقاعدة الهرم الثلاثى المذكور ويكون المسقط الرأسى لقاعدته خطا مستقيما موازيا لخط الارض ومن مركز القاعدة فى المسقط الافقى يمكن ايجاد المسقط الافقى لاحرفه كما سبق ومنها ايضا ومن ارتفاعه يمكن ايجاد مسقطها الرأسى ثم المسقط الرأسى لاحرفه

**مسألة ١٤ — المفروض قاعدة كثير السطوح ذى الاربعة أوجه المنتظم ا ب حـ شكل ٨٢ والمطلوب ايجاد ارتفاعه**

**العمل** : — شكل (٨٢) يبين المسقط الافقى لكثير السطوح ذى الاربعة أوجه عندما يكون أحد أوجهه موازيا للمستوى الافقى ، ا م هو المسقط الافقى لاحد أحرفه المائلة فبما أن جميع أوجهه متساوية وكلها مثلثات متساوية الاضلاع وبما أن ارتفاع هذا الهرم يساوى ضلع مثلث قائم الزاوية . ضلعه الآخر هو المسقط الأفقى لأحد الأحرف المائلة ووتره هو الطول الحقيقى لهذا الحرف وحيث أن ا م هو المسقط الافقى للحرف ا م فاذا ركزنا فى نقطة ا وبنصف قطر يساوى الطول الحقيقى



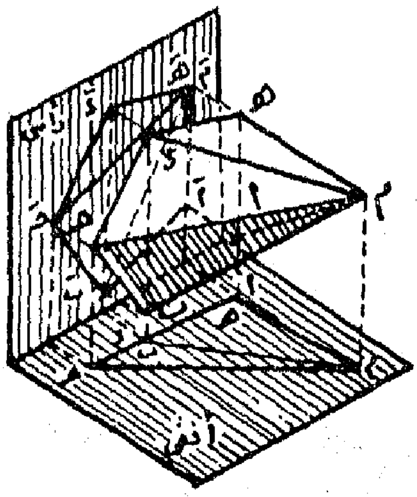

شكل ٨٢

للحرف ا م ( وهو يساوى أيضا ا ب ) ليقابل العمود المقام من م على ا م فى نقطة م̄ ثم يكون المثلث سابق الذكر هو المثلث ا م̄ م ويكون م م̄ ضلع ذلك المثلث الذى يساوى الارتفاع المطلوب

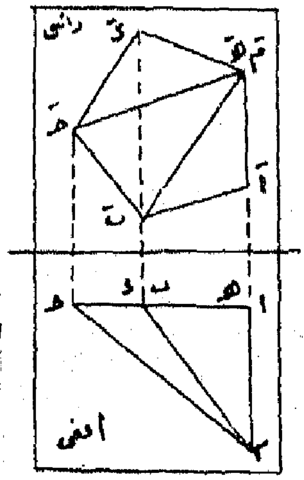
**مسألة ١٥ — طريقة رسم مسقطى هرم خماسى قاعدته موازية للمستوى الرأسى وأحد أوجهه فى مستو عمودى على كل من مستويى المسقط**

الشكل (٨٤) يبين مسقطى هرم خماسى قاعدته ا ب حـ ى هـ موازية للمستوى الرأسى وأحد أوجهه ا م هـ فى مستوى عمودى على كل من مستويى المسقط

ولرسم مسقطيه يبدأ أولا برسم المسقط الرأسى لقاعدته المفروضة ا ب حـ ى هـ ثم مسقطها الافقى وهو خط مستقيم مواز لخط الارض وليكن ا ب حـ ى هـ وبمعلومية مسقطى رأس الهرم م م̄ ن




شكل (٨٣)



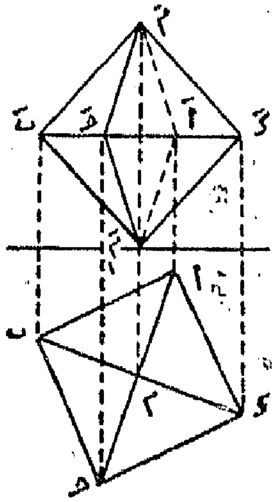

شكل (٨٤)

الايضاحات المفروضة وتوصيلهما الى كل من مسقطى اركان القاعدة ينتج مسقطى الهرم المطلوب وبشكل (٨٣) المنظور موضح موضع الهرم فى الفراغ ومسقطيه الرأسى والافقى

**مسألة ١٦ — طريقة رسم مسقطى كثير السطوح ذى الثمانية الاوجه المنتظم**

من المعلوم أن الخطوط الواصلة بين كل رأسين متقابلين من رؤوس كثير السطوح ذى الثمانية أوجه المنتظم تكوّن محاورة وعددها ثلاث كلها متساوية وتنصف بعضها بعضا وتتلاقى عند مركز الجسم فى زوايا قوائم .

وعند فحص الجسم قد يجـد أنه يمكن تقسيمه بثلاث طرق مختلفة الى هرمين رباعيين قائمين مشتركين فى القاعدة واوجـه كل منهما مثلثات متساوية الاضلاع ومتساوي . وان قطرين من اقطاره الثلاثة هما قطرا المربع المكون لقاعدة هذين الهرمين المشتركتين والقطر الثالث هو الواصل بين رأسيهما . فاذا وضع هـذا الجسم بحيث يكون أحـد اقطاره عموديا على أحد مستويى المسقط يكون مسقط الجسم كله على المستوى الثانى هو مربع مع قطريه فشكل ( ٨٥ ) يبين المسقط الأفقى والرأسى لـكثير السطوح ذى الثمانية الاوجه المنتظم فى هـذه الحالة . فمسقطه الافقى هو المربع ا ب حـ ء مع قطريه ا حـ ، ب ء المتلاقيين . فى م وهذا يرسم اولا



(شكل ٨٥)

والمربع ا ب حـ ء هو المسقط الافقى للقاعدة المشتركة للهرمين المذكورين وهو شكلها الحقيقى ونقطة م مركز القاعدة المشتركة هى المسقط الافقى لرأسى الهرمين والخط مَ مَ١ هو المسقط الرأسى المحور الرأسى لهذا الجسم ويكون عمودياً على خط الارض وطوله مساوٍ لـكل من ا حـ ، ب ء قطرى القاعدة المشتركة أو ارتفاع الهرمين معاً

، اَ بَ حـَ ءَ هو المسقط الرأسى للقاعـدة المشتركة بين الهرمين وهو خط مستقيم مواز لخط الارض ومنصف للخط مَ مَ١

## مسألة ١٧ — طريقة رسم مساقط الاجسام المستديرة

أولا — مسقطا الاسطوانة القائمة على كل من مستويى المسقط

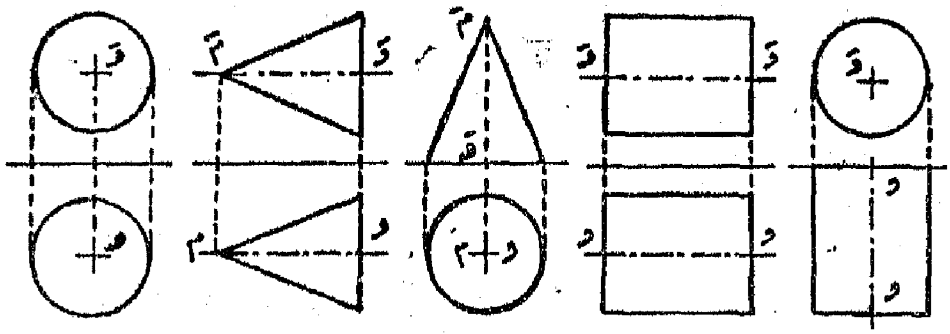
( ا ) تكون الاسطوانة القائمة فى ابسط أوضاعها فى الفراغ

عند ما يكون محورها عمودياً على أحـد مستوى المسقط وفى هذا الوضع يكون مسقطها على هذا المستوى هو دائرة قطرها مساو لقطر الاسطوانة ويكون مسقطها على المستوى الثانى عبارة عن مستطيل أحـد أضلاعه موازٍ لخط الارض ومساو لقطر

الاسطوانة أيضا والضلع المجاور له من المستطيل مساو لطول الاسطوانة وشكل ٨٦ يبيّن مسقطى الاسطوانة فى هذا الوضع

( ب ) عند مايكون محورها موازيا لكل من مستوبى المسقط

وفى هذه الحالة يكون كل من مسقطيها على مستوبى المسقط مستطيلا كالمستطيل السابق ذكره فى الحالة الاولى ويكون أحد اضلاعه مساويا لقطر الاسطوانة وعموديا على خط الارض والضلع المجاور له مساويا لطولها وموازيا لخط الارض وشكل ٨٧ يبيّن مسقطى الاسطوانة فى هذا الوضع



( شكل ٨٦ ) (شكل ٨٧) ( شكل ٨٨ ) (شكل ٨٩) (شكل ٩٠)

ثانياً — مسقطا المخروط القائم

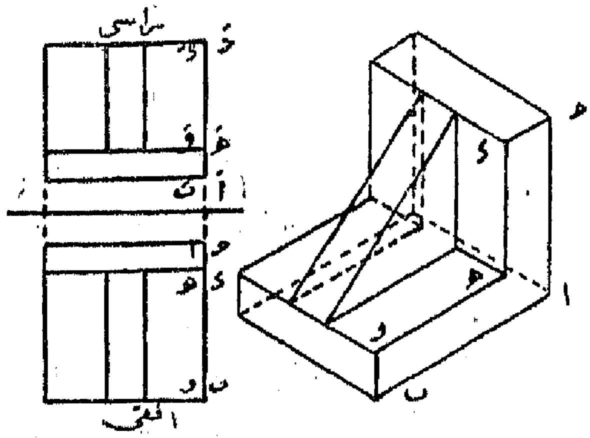
يكون المخروط القائم فى ابسط أوضاعه فى الفراغ : —

( ا ) عند مايكون محوره عمودياً على احد مستوبى المسقط وفى هذا الوضع يكون مسقطه عبارة عن دائرة قطرها مساويا لقطر قاعدة المخروط ويكون مسقطه الآخر مثلثا متساوى الساقين وقاعدته مساوية لقطر قاعدة المخروط وموازية لخط الأرض وارتفاعه مساويا لارتفاع المخروط وشكل ٨٨ يبيّن مسقطى المخروط فى هذا الوضع

( ب ) عند ما يكون محوره موازياً لكل من مستوبى المسقط وفى هذه الحالة يكون كل من مسقطيه على مستوبى المسقط مثلثاً كالمثلث السابق ذكره فى ( ا ) وقاعدته مساوية لقطر قاعدة المخروط وعمودية على خط الارض وارتفاعه مساويا لارتفاع المخروط وموازيا لخط الارض وشكل ٨٩ يبين مسقطى المخروط فى هذا الوضع

ثالثاً — مسقطا الكرة

يكون مسقطا الكرة فى أى وضع من أوضاعها على مستويى المسقط عبارة عن دائرتين قطر كل منهما مساويا لقطر الكرة ويكون مركزى هاتين الدائرتين على خط مستقيم عمودى على خط الارض وشكل ٩٠ يبين مسقط الكرة فى أى وضع من أوضاعها



( شكل ٩١)

والشكل ٩١ يبين منظوراً ومسقطين لزاوية كابولى وفيه الضلعان الخارجان ا ب ، ا حـ متعامدان على بعضهما وأحدهما أفقى والآخر رأسى على التوالى والضلعان الداخلان ء هـ ، هـ و متعامدان أيضاً وموازيان للضلعين الخارجين على التناظر وفى مستويهما فيكون مسقطى هذه الخطوط الأربعة (المكونة لهذا السطح) على مستويى المسقط على خط مستقيم واحد ومن الشكلين يفهم كيفية اسقاط الجسم على مستويى المسقط

# تمرين ٢

## على مساقط الاجسام

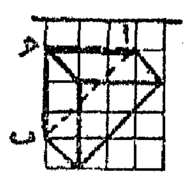
(١) مكعب طول أحد أحرفه ٢٫٥ سم وأحد أوجهه موازياً المستوى الافقى ويبعد عنه بمقدار ٢ سم والمسقط الأفقى لهذا المكعب هو مربع يميل أحد أحرفه بزاوية ٣٠° مع خط الأرض ويبعد أقرب أركانه عن خط الارض بمقدار ٢٫٥ سم أوجد مسقطى هذا المكعب على كل من مستويى المسقط

(٢) أوجد مسقطى المكعب فى المسألة السابقة اذا كان موضوعاً عليه كرة ومركزها على خط مستقيم واحد مع مركز احدى قاعدتيه الافقيتين وقطرها يساوى ٢ سم

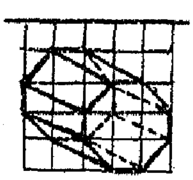
(٣) أوجد مسقطى المكعب فى المسألة نمرة (١) اذا كان موضوعاً عليه هرم رباعى قائم ارتفاعه ٣ سم وأحد أضلاع قاعدته مساوٍ لطول حرف المكعب ويميل بزاوية ٤٥° مع خط الارض وينطبق مركز قاعدة هذا الهرم على مركز الوجه الأعلى للمكعب

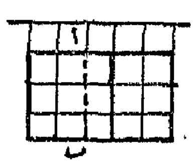
(٤) شكل ٩٢ يبين المسقط الأفقى لمنشور ثلاثى مائل قاعدته ا ب حـ موضوع

أشكال

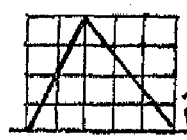


٩٢

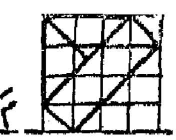

٩٣



٩٤



٩٥


٩٦

على المستوى الافقى وارتفاعه ٤ سم . ارسم المسقط الافقى لهذا المنشور ثم اوجد منه المسقط الرأسى . ارسم أيضاً مسقطى هذا المنشور على مستويى المسقط عند ماتكون قاعدته على المستوى الافقى والحرف ا ب منه موازياً لخط الارض

(٥) شكل ٩٣ يبيّن المسقط الافقى لمنشور مائل عند ماتكون احدى قاعدتيه

منطبقة على المستوى الافقى وارتفاعه ٤ سم ارسم مسقطه الافقى هـذا ومنه أوجـد المسقط الرأسى

(٦) شكل ٩٤ يبيّن منشوراً رباعياً قائماً أحد أحرفه ا ب منطبق على المستوى الافقى ارسم مسقطه الافقى هذا ومنه أوجد المسقط الرأسى

(٧) شكل ٩٥ يبيّن المسقط الرأسى لهرم رباعى قائم ونقطة مَ هى المسقط الرأسى لرأس ذلك الهرم . ارسم المسقط الرأسى هذا ومنه اوجد المسقط الافقى

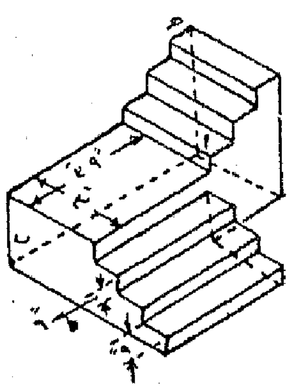
(٨) شكل ٩٦ يبين المسقط الرأسى لمنشور رباعى قائم وموضوع عليه هرم رباعى قائم واركان قاعدة ذلك الهرم واقعة على نقط منتصفات أحرف أحد الأوجه المربعة للمنشور أرسم المسقط الرأسى هذا ومنه أوجد المسقط الافقى

(٩) أوجد مسقطى كثير السطوح ذى الاثنى عشر وجها المنتظم الذى طول كل حرف من أحرفه ٥ سم عند مايقع أحد أوجهه على المستوى الرأسى وعند مايميل أحد أحرف هذا الوجه بزاوية ٢٠° مع خط الارض

(١٠) أوجد مسقطى كثير السطوح ذى الثمانية أوجه المنتظم الذى طول كل حرف من أحرفه ٤ سم عند ما يكون أحد محاوره عموديا على المستوى الرأسى والمسقط الرأسى لمحور آخر منه يميل بزاوية ٦٠° مع خط الارض

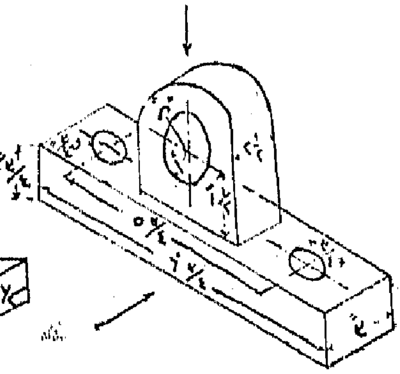
(١١) شكل ٩٧ يبين منظوراً لقلبتين من الدرج وبسطة بينهما لسلم. ارسم مسقطى القلبتين والبسطة بمقياس مناسب للورقة عند ما يكون الحرف ا حـ فى المستوى الرأسى والحرف ا ب فى المستوى الافقى ويميل بزاوية ٣٠° مع خط الارض

(١٢) أوجد مسقطى كل من الأجسام المبينة فى الاشكال من ا الى هـ فى اتجاه الأسهم شكل ٩٨

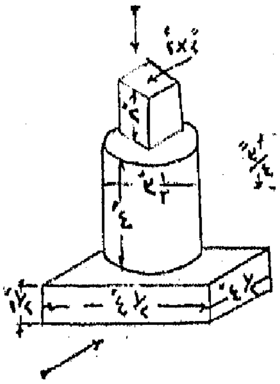


شكل (٩٧)

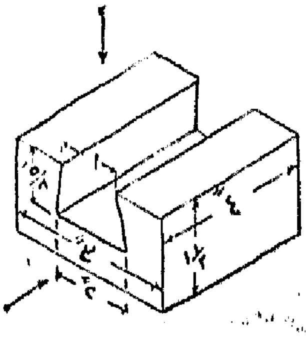
شكل ( ٩٨ )



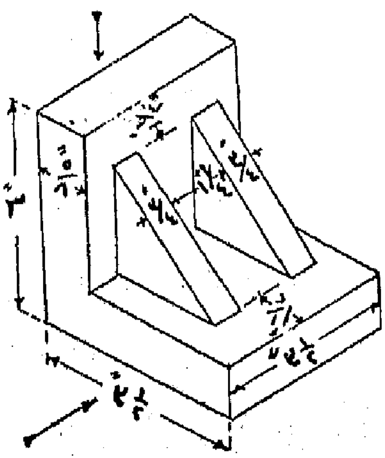
( شكل ا )



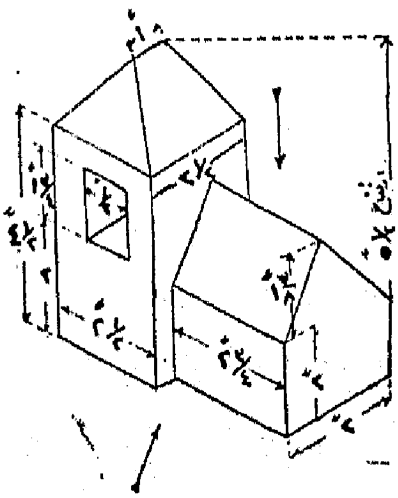
( شكل ب )



( شكل حـ )



( شكل ى )



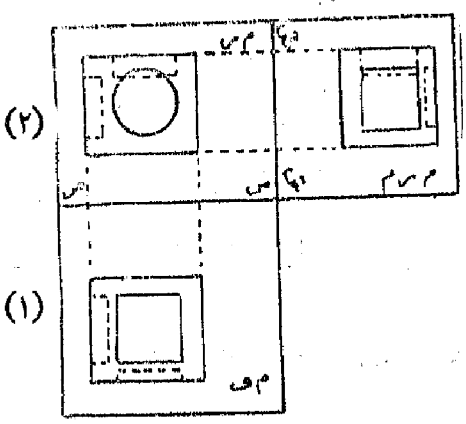
( شكل هـ )

# الفصل الخامس

## فى تغيـــــير مستوبى المسقط

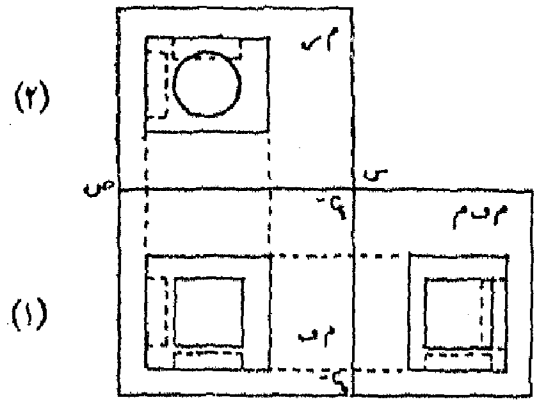
### المساقط المساعدة :

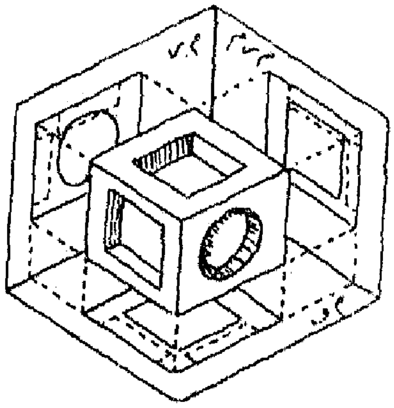
مقدمة — يتعين الشكل الحقيقى لأى جسم عادة بأسقاطه على مستويى المسقط وهما المستوى الافقى والمستوى الرأسى ولكنه أحيانا لا يكفى لذلك هذان المسقطان فقط فيضاف اليهما مساقط أخرى لزيادة الايضاح فى كيفية تكوين الجسم وسهولة تصوره




شكل (٩٩)

فمثلا الشكل (٩٩) يبين المسقط الأفقى (١) والمسقط الرأسى (٢) لجسم منشورى به تجاويف ثلاثة فى ثلاثة أوجه من أوجهه ويؤخذ من المسقطين الافقى والرأسى له أن شكل التجويف العلوى مستطيل وشكل التجويف الامامى اسطوانى ولكنه لا يفهم منهما شكل التجويف الجانبى على اليسار اذا كان مستطيلا أو اسطوانيا فباسقاط الوجه الجانبى الذى به التجويف المذكور على مستو ثالث مواز له يمكننا أن نوضح الشكل الحقيقى لهذا التجويف وقد أخذ هذا المستوى الثالث فى حالتنا هذه عموديا على المستوى الافقى فهو اذاً مستو رأسى يطلق عليه «المستوى الرأسى المساعد» ويرمز له بالرمز م ر م ؛ يتقاطع مع المستوى الرأسى فى خط أرض جديد سَ صَ ومسقط الجسم عليه يسمى « بالمسقط الرأسى المساعد » وهو المسقط (٣)





شكل (١٠١)　　(٣)　　شكل (١٠٠)

والشكل المنظور (١٠٠) يبين المنشور ومساقطه الثلاثة المذكورة (١) ، (٢) ، (٣)

ويسمى المستوى الرأسى المساعد « بالمستوى الجانبي » اذا كان عمودياً على كل من مستويي المسقط ومسقط أى جسم عليه يسمى « بالمسقط الجانبي » ويتقاطع هذا المستوى مع المستوى الرأسى فى خط أرض ثالث سَ سَ كما بالشكل

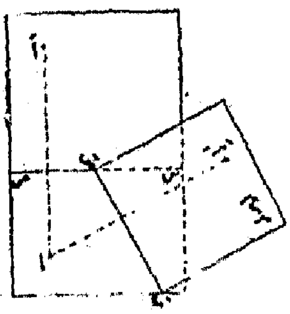
فاذا دار هذا المستوى حول خط تقاطعه مع المستوى الافقى س١ ص١ حتى انطبق عليه يسمى مسقط الجسم عليه « بالمسقط الافقى الجانبي » ( شكل ١٠١ ) نمرة ٣

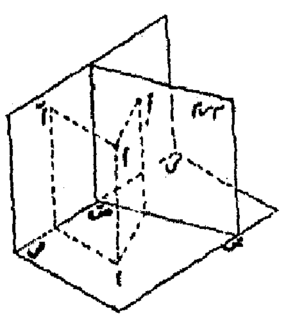
واذا دار هذا المستوى حول خط تقاطعه مع المستوى الرأسى سَ صَ حتى انطبق على المستوى الرأسى ثم دارا معاً حتى انطبقا على المستوى الافقى سمى مسقط الجسم عليه « بالمسقط الرأسى الجانبي » شكل (٩٩)

## ٢٢ — المساقط المساعدة للنقط :

لمعرفة الطرق والقواعد اللازم مراعاتها فى ايجاد المساقط المساعدة لأى سطح أو جسم نبدأ أولا بمعرفة القواعد الخاصة بالمساقط المساعدة للنقطة

فالشكل المنظور (١٠٢) يبين النقطة ا فى الفراغ ويبين مسقطها الافقى ا على المستوى الافقى م ب ومسقطها الرأسى اَ على المستوى الرأسى م ر وفيه س ص خط الارض لهذين المستويين



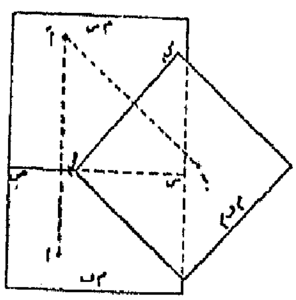


( شكل ١٠٣ )　　( شكل ١٠٢ )

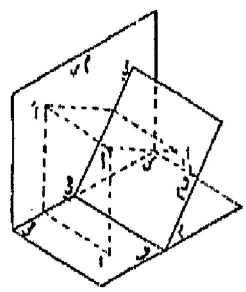
أما سَ صَ فهو خط ارض جديد يتقاطع فيه مستوى رأسى مساعد م م مع المستوى الافقى ونقطة ا١ هى مسقط النقطة ا على المستوى الاخير فاذا دار المستوى الرأسى م ر والمستوى الرأسى المساعد م م كل حول خط تقاطعه مع المستوى الافقى س ص و سَ صَ على التوالى حتى انطبقا على المستوى الافقى لنتج الشكل (١٠٣) الذى يبين المساقط الثلاثة السابقة الذكر للنقطة ا بعد الانطباق وأهم شيء يجب ملاحظته فى هذا الشكل الاخير هو

اولا ــ ان بعد كل من اَ و ا١ عن خطى الارض س ص و سَ صَ على التوالى ثابت وذلك لأن ارتفاع النقطة ا عن المستوى الافقى لم يتغير فى كلتا الحالتين

ثانيا ــ ان الخط الذى يصل ا و اَ هو مستقيم عمودي على خط الارض س ص وكذا الخط الواصل من ا الى ا١ هو خط مستقيم عمودى على سَ صَ



(شكل ١٠٥)



(شكل ١٠٤)

وفى الشكل المنظور (١٠٤) نري ان النقطة ا فى الفراغ اسقطت على مستوى افقى م ب وعلى مستوي رأسى م ر وعلى مستوى افقى مساعد م ف م وان س ص هو خط الأرض بين المستويين الافقى والرأسى و س١ص١ هو خط الارض الجديد بين المستويين الافقيين م ف و م ف م فاذا دار المستوى الرأسى والافقى المساعد كل حول خط الارض س ص و س١ص١ على التوالى لنتج الشكل (١٠٥) وفيه الثلاثة مساقط للنقطة ا وهى مسقطها الافقى ا والرأسى اَ والافقى المساعد ا١ وهنا يلاحظ أيضا :ــ

أولا ـــ ان بعد المسقطين الافقيين ا و ا١ عن س ص و س١ص١ على التوالى ثابت وذلك لأن بعد النقطة ا عن المستوى الرأسى لم يتغير

ثانياً ــ أن كل من ا اَ و ا١ اَ عمودى على خط الارض س ص و س١ ص١ على التوالى

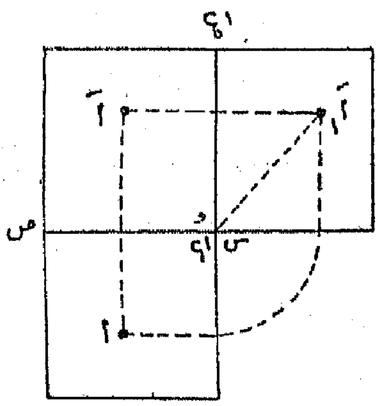
أما اذا كان المستوى الرأسى المساعد أو المستوى الافقى المساعد عمودياً على كل من مستويى المسقط الاصليين فمسقط النقطة ا على الاول يقال له المسقط

«الرأسى الجانبى» وعلى الثانى يقال له «المسقط الافقى» الجانبى لتلك النقطة والشكل (١٠٧) يبين مساقط النقطة ا الثلاثة فى الحالة الاولى وهى الاكثر استعمالا والشكل (١٠٦) يبين مساقطها الثلاثة ايضاً فى الحالة الثانية وواضح بكل شكل أولا طريقة رسم المسقط الجانبى لنقطة معلوم مسقطاها الافقى والرأسى وثانيا طريقة ايجاد بعدها الحقيقى عن خط الارض س ص فى الفراغ وهو ا١ و ى آ١ و

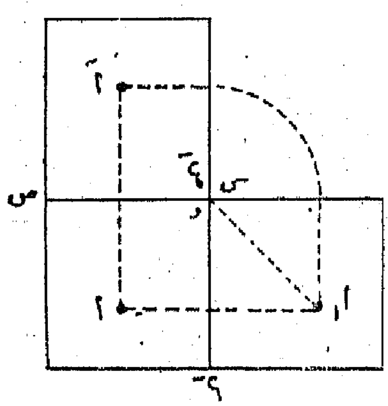
وعلى الطالب فحص الاشكال من (١٠٢) الى (١٠٧) وتطبيق القواعد الآتية عليها وهى

أولا — ان المسقط الافقى والرأسى للنقطة يقعان على خط مستقيم عمودى على خط الارض

ثانياً — انه اذا اسقطت عدة مساقط رأسية من مسقط افقى واحد فان مسافات تلك المساقط الرأسية ثابتة كل عن خط الارض المقابل له



( شكل ١٠٧ )



( شكل ١٠٦ )

ثالثاً — انه اذا أسقطت عدة مساقط أفقية من مسقط رأسى واحد فان مسافاتها ثابتة كل عن خط الارض المقابل له

## ٢٣ — المساقط المساعدة للخط المستقيم والسطح والجسم

من القواعد السابقة فى المساقط المساعدة للنقطة يمكننا أن نرسم المساقط المساعدة للخط المستقيم وذلك برسم المساقط المساعدة لنقطتين منه ورسم المساقط

المساعدة لسطح ترسم المساقط المساعدة لنقط تقاطع الخطوط التى تحده ولرسم المساقط لمساعدة لجسم ترسم المساقط المساعدة لرؤوسه

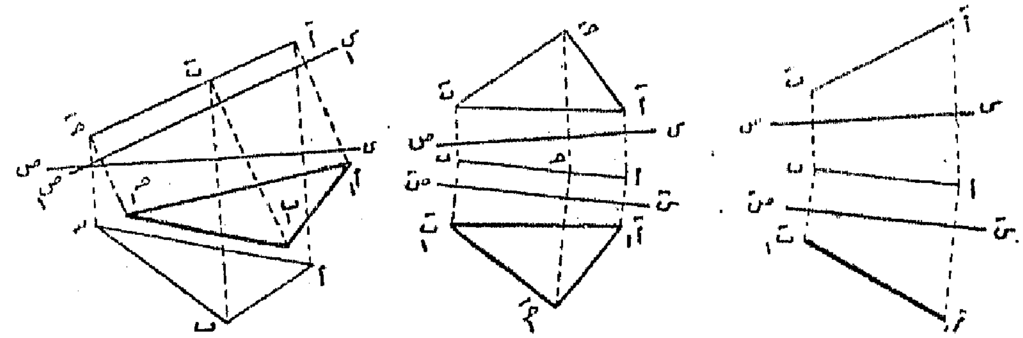
وتستعمل المساقط المساعدة ايضا فى احوال كثيرة منها

أولا -- ايجاد الطول الحقيقى لخط مستقيم معلوم مسقطاه كما هو مبين بمثال (١)

ثانياً -- ايجاد الشكل الحقيقى لسطح معلوم مسقطاه أيضاً كما هو مبين بمثالى (٢) و (٣)

ثالثاً -- ايجاد مسقطين افقى ورأسى لأى جسم بشروط معينة يصعب على الطالب رسمها بدون استعمال المستويات المساعدة كما هو مبين بمثال (٤) و (٥) و (٦)

مثال ١ -- الشكل (١٠٨) يبين المسقط الافقى والرأسى للخط ا ب و يبين



( شكل ١١٠ ) ( شكل ١٠٩ ) ( شكل ١٠٨ )

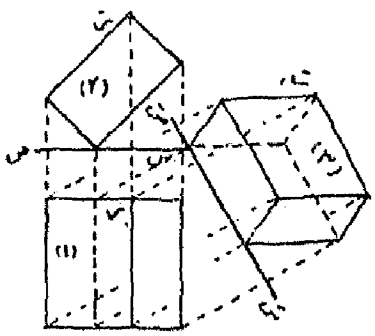
المسقط الرأسى المساعد له على المستوى م م م الموازى لمسقطه الافقى ومأخوذ ابعاد مسقطه المساعد هذا عن خط الارض سَ صَ من ابعاد مسقطه الرأسى عن س ص كل لنظيره وهذا المسقط لابد اذاً وان يكون مساوياً للطول الحقيقى للخط ا ب

مثال ٢ -- الشكل (١٠٩) يبين المسقط الافقى والرأسى لمثلث ا ب حـ الموجود فى مستوى رأسى و يبين ايضا مسقطه على مستوى رأسى مساعد مواز لمستوى المثلث ومأخوذة ابعاد هذا المسقط عن خط الارض الجديد سَ صَ من أبعاد المسقط الرأسى الاصلى عن س ص على التناظر وهذا المسقط المساعد هو الشكل الحقيقى للمثلث المذكور

مثال ٣ -- والشكل (١١٠) يبين المسقط الافقى والرأسى لمثلث ا ب حـ الموجود فى مستوى عمودى على الرأسى مسقوط على مستوى افقى مساعد مواز

لمستوى المثلث ومأخوذة ابعاد مسقطه الاخير عن خط الارض س، ص، من الابعاد المناظرة لها فى المسقط الافقى الاصلى كل لنظيره وهذا المسقط هو الشكل الحقيقى المثلث أيضا

مثال ٤ — الشكل ( ١١١ ) يبين المسقط الافقى ( ١ ) والمسقط الرأسى ( ٢ ) لمنشور قائم ويبين مسقطاً رأسياً مساعداً لنفس المنشور على خط ارض جديد سَ صَ وبه احد احرف المنشور منطبقا على المستوى الافقى . وهذا المسقط مأخوذة ابعاده من أبعاد المساقط الرأسية الاصلية لرؤوسه فمثلا من المسقط الافقى ر والمسقط الرأسى رَ لاحد رؤوسه ( ر ) رسم المسقط الرأسى المساعد رَ، لهذه الرأس باسقاط عمود من ر على خط الارض سَ صَ وامتداده الى رَ، بحيث يكون بعد رَ، عن سَ صَ هو نفس بعد رَ عن س ص وعلى هذه الطريقة رسمت المساقط الرأسية المساعدة لباقى رؤوسه



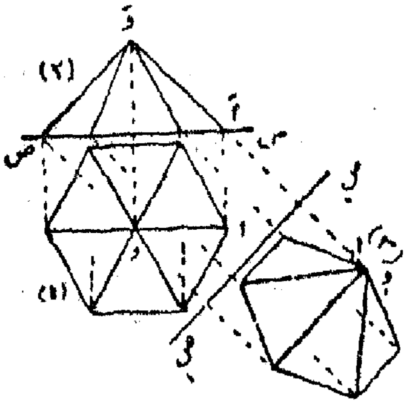
( شكل ١١١ )

مثال ٥ — ليكن المطلوب رسم مسقطى اى جسم عندما يكون به حرف أو خط معين فيه رأسيا

العمل — يرسم اولا المسقط الافقى والرأسى لهذا الجسم فى أبسط أوضاعه بحيث يكون الحرف او الخط المذكور موازيا للمستوى الرأسى اى مسقطه الافقى موازيا لخط الارض

ثم يؤخذ خط ارض جديد عمودى على المسقط الرأسى لهذا الحرف ويرسم للجسم مسقطاً افقيا مساعداً تؤخذ ابعاده من المسقط الافقى الاصلى لهذا الجسم فيكون المسقط الرأسى الأصلى للجسم مع مسقطه الافقى المساعد هما المسقطان المطلوبان

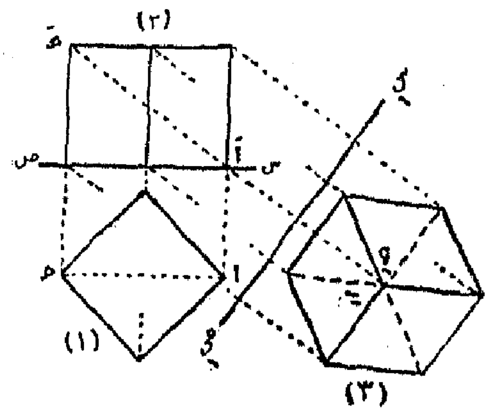
فالشكل ( ١١٢ ) يبين طريقة رسم مسقطى هرم سداسى عندما يكون أحد أحرفه ا و رأسيا وقد وضع الجسم بقاعدته على المستوى الافقى بحيث يكون الحرف ا و موازيا المستوى الرأسى أو بمعنى آخر مسقطه الافقى او موازيا لخط الارض وهذا الوضع أبسط اوضاع الجسم بالنسبة لمستويى المسقط



(شكل ١١٢)

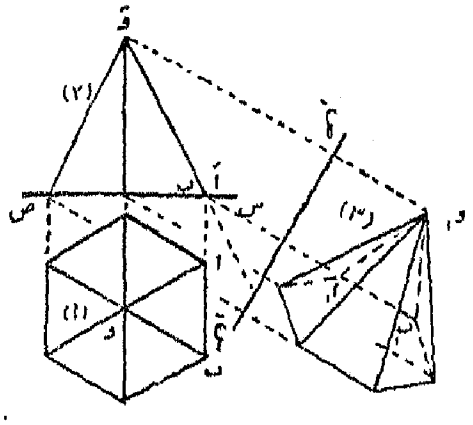
ثم رسم خط أرض جديد س١ ص١ عموديا على اَ وَ المسقط الرأسى للحرف ا و ومن المسقط الرأسى للهرم اسقط على س١ ص١ مسقط افقي مساعد (٣) بالطريقة السابق شرحها فصار المسقطان (١) و (٣) هما المسقطان المطلوبان

والشكل ( ١١٣ ) يبين المسقط الافقى ( ١ ) والمسقط الرأسى ( ٢ ) لمكعب فى أبسط أوضاعه ومن المسقط الرأسى ( ٢ ) اسقط المسقط الافقى المساعد ( ٣ ) على خط ارض جديد س١ ص١ عمودى على المسقط الرأسى لأحد أقطار المكعب حـ اَ فصار المسقط (٢) والمسقط (٣) يمثلان المكعب عند ما يكون احد اقطاره حـ ا عموديا على المستوى الافقى



( شكل ١١٣ )

مثال ٦ — وعندما يراد رسم مسقطى جسم ما بحيث يكون خط أو وجه معين فيه يميل بزاوية معلومة على المستوى الافقى تعمل نفس الطريقة السابقة بحيث يكون خط الارض الجديد مائلا على المسقط الرأسى لهذا الخط او الوجه بالزاوية المعلومة ويؤتى بمسقطه الافقى المساعد بعد ذلك كما تقدم



(شكل ١١٤)

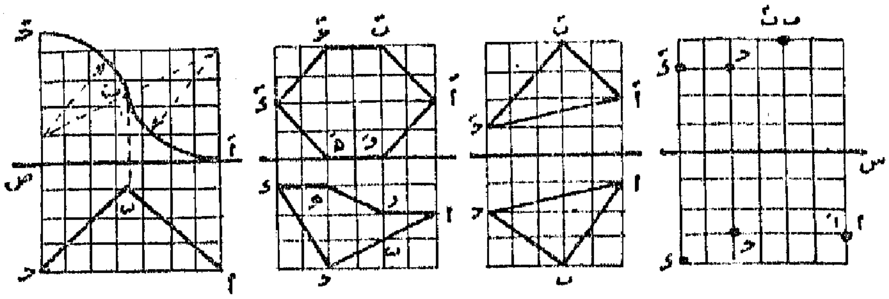
والشكل (١١٤) يبين المسقط الافقى (١) والمسقط الرأسى (٢) والمسقط الافقى المساعد (٣) لهرم سداسى يميل احد اوجهه و ا ب بالزاوية θ وفيه رسم المسقطان (١) و (٢) وهو فى ابسط اوضاعه وبحيث كان احد الأوجه و ا ب عموديا على المستوى الرأسى أى ان مسقطه الرأسى عليه وَ اَ بَ خط مستقيم ثم أخذ خط الارض س١ ص١ يميل بالزاوية θ على وَ اَ بَ وبعد ذلك اسقط المسقط (٣) بالطريقة المتقدمة

والاشكال من (١٠٨) الى (١١٤) توضح كيفية ايجاد المساقط المساعدة لخط وسطح وجسم على التوالى ويمكن فهمهما بمجرد النظر اليها فلاداع لشرحها وسيأتى الكلام بعد ذلك على استعمال المستويات المساعدة فى ايجاد الاشكال الحقيقية لقطاعات الاجسام الخ

# ( تمرين ٣ )

## على المساقط المساعدة والجانبية فى الباب الخامس

( ١ ) ارسم المساقط الرأسية المساعدة لكل من النقط المبين مساقطها الافقية الرأسية فى شكل (١١٥) على خط ارض يميل بزاوية ٦٠° مع خط الارض س ص



( شكل ١١٥ ) ( شكل ١١٦ ) ( شكل ١١٧ ) (شكل ١١٨)

واذكر القواعد الاساسية التى لابد من ملاحظتها اثناء العمل

( ٢ ) ارسم المساقط الجانبية الرأسية لنفس النقط المبينة فى الشكل السابق بحيث يبعد كل منها عن المستوى الجانبى بمقدار ٢سم ومنها أوجد البعد الحقيقى لكل نقطة عن خط الارض س ص فى الفراغ

( ٣ ) الشكل (١١٦) يبين مسقطى مثلث فى الفراغ والمطلوب رسم مسقط رأسى مساعد لهذا المثلث على خط ارض يوازى ب حـ ثم ايجاد مسقطه الرأسى الجانبى ومسقطه الافقى الجانبى على مستوى جانبى يبعد بمقدار ١ س م عن الرأس ا

( ٤ ) الشكل ا ب حـ ء هـ و ( وهو ليس بسطح مستو ) مبين مسقطاه بشكل (١١٧) والمطلوب رسم مسقطه الرأسى المساعد على خط ارض يوازى ب حـ ومسقطه الافقى المساعد على خط ارض يوازى ءَ هـَ

( ٥ ) ارسم المسقط الجانبى للخطين المنحنيين المتصلين ببعضهما ومبين مسقطاهما فى شكل ( ١١٨ )

ملاحظة — عند تمثيل المربعات الموجودة فى الاشكال من (١١٥) الى (١١٨) يؤخذ ضلع المربع ١ س م

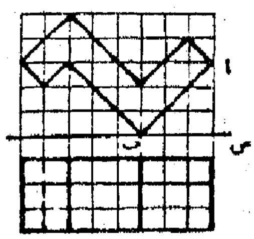
(٦) ارسم المساقط الثلاثة الأفقية والرأسية والجانبية للنقط المذكورة بتطبيق (٢) تمرينات نمرة ١ صفحة (٤٠)

(٧) منشور ثمانى منتظم قائم طول ضلع كل من قاعدتيه المثمنة هو ٣ س م وارتفاعه ٦ س م يرتكز بوجه من أوجهه المستطيلة الجانبية على المستوى الافقى وتميل قاعدتاه على المستوى الرأسى بزاويه ٤٥° اوجد مسقطه الرأسى والافقى فى هذا الوضع

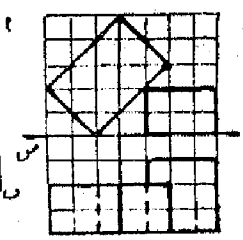
(٨) ارسم المسقط الافقى والرأسى لجسم كثير السطوح ذى الثمانية الأوجه المنتظم عندما يكون أحد اوجهه المثلثية افقياً و يبعد ١ س م عن المستوى الأفقى

(٩) ارسم المسقط الافقى والرأسى لمخروط قطر قاعدته ٤ س م وارتفاعه ٦ س م عند ماتميل قاعدته على المستوى الرأسى بزاوية ٣٠°

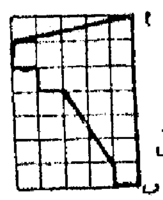
(١٠) الشكل (١١٩) يبين جسم مكون من كوعين قائمى الزاوية والمطلوب ايجاد المسقط الرأسى والافقى لهذا الكوع عند ما تكون قاعدته ا ب افقية



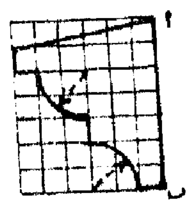
(شكل ١١٩)



(شكل ١٢٠)



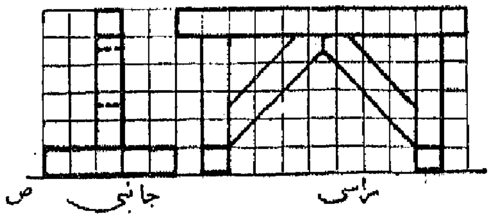
(شكل ١٢١)



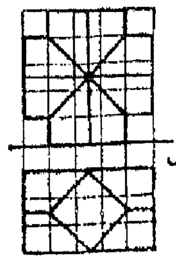
(شكل ١٢٢)

(١١) الشكل (١٢٠) يبين منشورين قائمين مرتكز احدهما على الآخر والمطلوب ايجاد المسقط الجانبى لهما معاً

(١٢) الشكلان (١٢١) و (١٢٢) يبينان حليتين تركبان فى المبانى على حائط رأسى مواز للخط ا ب والمطلوب ايجاد المسقط الافقى لكل منهما بطول يساوى ثلاث مربعات عمودى على مستوى الورقة ثم ايجاد المسقط الجانبى لهما أيضاً




(شكل ١٢٤)




( شكل ١٢٣ )

(١٣) الشكل (١٢٣) يبين جسم مكوّن من منشورين رباعيين متقاطعين ارسم المسقط الرأسى لهذا الجسم على خط ارض يميل ٦٠° مع خط الارض س ص

(١٤) ارسم الجسم السابق فى شكل (١٢٣) عند ما يكون احد قواعده الاربعة مائلا على المستوى الافقى بزاوية ٣٠°

(١٥) الشكل (١٢٤) يبين المسقط الجانبي والرأسى لجسم والمطلوب رسم المسقط الافقى لهذا الجسم

ملاحظة : كل المربعات التى بالاشكال السابقة يؤخذ طول ضلع كل منها ١ س م

# الفصل السادس

## فى المستويات الفراغية بالنسبة لمستوى المسقط

### ٢٤ — تمثيل المستويات فى الفراغ بالنسبة لمستويى المسقط

يمثل أى مستوى فى الفراغ بخطى تقاطعه مع مستويى المسقط ويسمى خط تقاطع أى مستوى فى الفراغ مع المستوى الرأسى بالاثر الرأسى وخط تقاطعه مع المستوى الافقى بالاثر الافقى فيتعين اذاً المستوى بمعلومية أثرية الرأسى والافقى

وخط تقاطع أى مستوى مع مستوى آخر يسمى باثره على ذلك المستوى وانما يقصد عادة بكلمة أثر المستوى فى الهندسة الوصفية أنه خط تقاطع أى مستوى مع أحد مستويى المسقط .

ملاحظة : — يحتوى اثرا أى مستوى على اثرات جميع الخطوط المرسومة فيه لان اثر أى خط مستقيم هو نقطة تقاطعه ( تقابله ) مع أحد مستويى المسقط فاذا وجد هـذا المستقيم فى أى مستوى لابد من وجود أثرية على خطى تقاطع مستويه بمستويى المسقط أى على أثرى هذا المستوى

### ٢٥ — اوضاع المستوى بالنسبة لمستويى المسقط

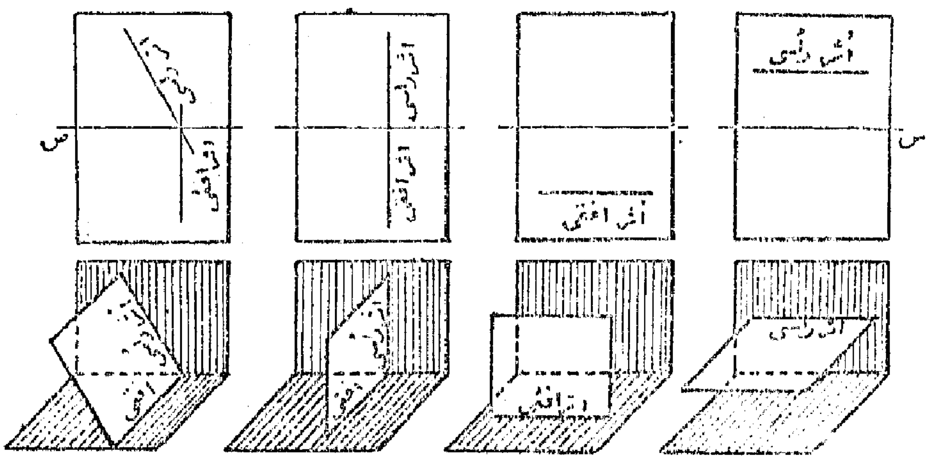
تبيّن الاجزاء السفلى المنظورة فى الاشكال من نمرة ١٢٥ الى نمرة ١٣٣ مستويات تشغل مواضع مختلفة فى الفراغ بالنسبة لمستويى المسقط وتبين الاجزاء العليا منهـا تمثيل تلك المستويات بواسطة اثرى كل منهما على مستويى المسقط بعد انطباقهما على بعضهما .

فالشكل (١٢٥) يبيّن مستوياً موازياً للمستوى الافقى وعمودياً على المستوى الرأسى فيكون «افقيا» وهذا ليس له الا أثر رأسى مواز لخط الارض

وشكل ١٢٦ يبيّن مستوياً موازيا المستوى الرأسي وعمودياً على المستوى الافقي فيكون « رأسيا » وهذا ليس له الاّ اثر افقي مواز لخط الارض

وشكل ( ١٢٧ ) يبين مستوياً متعامداً على كل من مستويي المسقط فيكون « عمودياً على خط الارض » ويكون أثراه على استقامة واحدة وعموديين على خط الارض

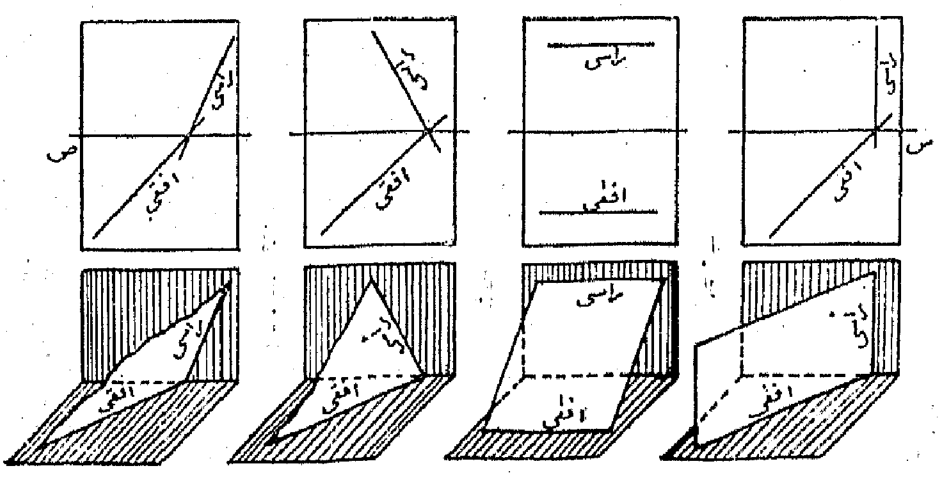
أشكال




(١٢٨) (١٢٧) (١٢٦) (١٢٥)

وشكل (١٢٨) يبين مستوياً مائلا على المستوى الافقي وعموديا على المستوى الرأسي وهذا يميل أثره الرأسي على خط الارض ويكون أثره الافقي عمودياً عليه

وشكل (١٢٩) يبيّن مستوياً عموديا على المستوى الافقي ومائلا على المستوى الرأسي وهذا يكون اثره الافقي مائلا على خط الارض وأثره الرأسي متعامدا عليه

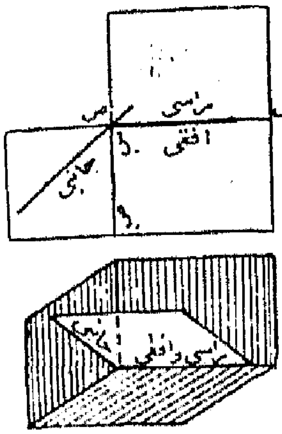



١٣٢ ١٣١ ١٣٠ ١٢٩

وشكل (١٣٠) يبين مستوياً مائلا على كل من مستويى المسقط وموازياً لخط الارض وهذا يكون أثراه الرأسى والافقى متوازيين وموازيين لخط الارض

وشكلا (١٣١) و (١٣٢) يبينان مستويين مائلين على مستويى المسقط وعلى خط الارض ويقال لهما مستويين « اختياريين » ومثل كل من هذين المستويين يكون كل من أثريه الرأسى والافقى مائلا على خط الارض

وشكل (١٣٣) يبين مستوياً محتوياً على خط الارض ومائلا على كل من مستويى المسقط وهذا يكون اثراه منطبقين على خط الارض وفى هذه الحالة لايتعين مثل هذا المستوى تماما بمعلومية أثرية على مستويى المسقط فقط وانما يلزم ذكر او رسم اثر ذلك المستوى على مستوى جانبى كما هو موضح بالشكل .




( شكل ١٣٣ )

**والمستوى العمودى** - يطلق على كل مستوى متعامد على أحد مستويى المسقط او على كليهما معاً كما بالاشكال الخمسة الاول من ١٢٥ الى ١٢٩ .

**والمستوى المائل** - يطلق على كل مستوى يميل على كل من مستويى المسقط معاً . كما بالاشكال من ١٣٠ الى ١٣٣

ومن الواضح فى الاشكال السابقة لاوضاع المستوى فى الفراغ انه .

أولا — اذا تقاطع الاثران لاى مستوى فانما يتقاطعان على خط الارض فى نقطه واحدة وذلك لان نقطة تقاطع الاثرين لا بد وان تكون فى كل من مستويى المسقط وهذا لايمكن الا بوجودها على خط الارض .

ثانيا — واذا لم يتقاطع الاثران فانهما يوازيان خط الارض او ينطبقان عليه . كما بشكل ١٣٠

ثالثاً — انه يكفى لتعيين أثرى أى مستوى اما أحد أثريه ونقطة على أثره الآخر واما نقطتين على كل من أثريه .

وينتج من الثلاث نقط المتقدمة ومما ذكر فى نتيجة ٢ النظرية الثانية من الهندسة الفراغية صفحة ٦٦ أنه يتعين المستوى الفراغى أما بمستقيمين متقاطعين او متوازيين واما بمستقيم ونقطة خارجة عنه واما بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة

لانه فى كل حالة من تلك الاحوال يمكن تعيين خطين فى هذا المستوى و يمكن تعيين اثرى هذين الخطين فيعلم نقطتين على كل اثر من اثرى المستوى و بهذا يتعين الاثران أو بمعنى آخر يتعين المستوى .

**مسألة ١٨ — تعيين أثرى مستوى يحتوى على ثلاثة نقط ليست على استقامة واحدة**

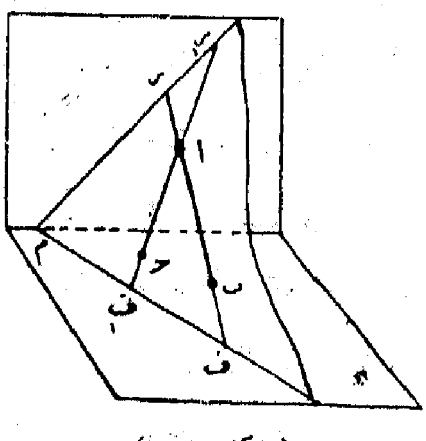
**المفروض** — ان الثلاث نقط ا و ب و حـ ليست على استقامة واحدة وان ا ب حـ هى مساقطها الافقية و اَ بَ حَـ هى مساقطها الرأسية على التوالى شكل ١٣٤

**والمطلوب** — تعيين اثرى المستوى المحتوى على الثلاث نقط ا و ب و حـ .

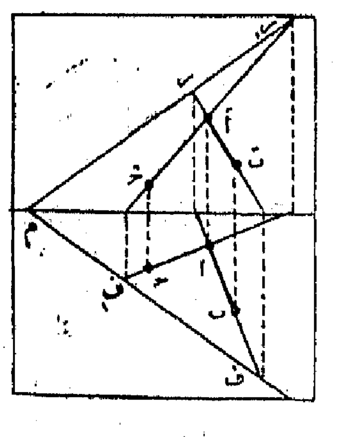
**العمل** — نصل ا ب و اَ بَ فيتكون مسقطا الخط ا ب

ثم نجد اثرى الخط ا ب بالطريقة المتقدمة فى مسألة ٢ بالصفحة ٣٣ ولتكن النقطتان س و ف هما الاثران الرأسى والافقى لهذا الخط .

ونصل احـ و اَحَـ فيتكون مسقطا الخط احـ



(شكل ١٣٥)



(شكل ١٣٤)

ثم نجد اثرى الخط ا حـ ولتكن النقطتان س١ و ف١ هما الاثران الرأسى والافقى لهذا الخط فيكون الخط س١ س هو الاثر الرأسى للمستوى و ف ف١ هو اثره الافقى و يتقابل

الاثران على خط الارض فى نقطة مثل م وهو المطلوب .

والشكل المنظور ١٣٥ يبيّن ما توضح

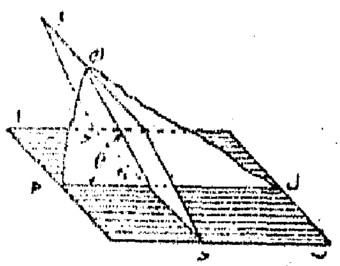
**البرهان** — الثلاث نقط ا ؤ ب حـ فى مستو واحد فرضاً فيكون الخطان ا ب ؤ احـ فى هذا المستوى ويكون اثراهما على اثرى ذلك المستوى أى ان نقطتى م ؤ م١ من نقط الاثر الرأسى للمستوى وكذا ف ؤ ف١ من نقط الاثر الافقى له وهو المطلوب .

**ملاحظة** — لابد وان يقع اثر الخط ب حـ على كل من اثرى هذا المستوى أيضا

## ٢٦ — الزاوية الزوجية او الزاوية بين مستويين

ذكرنا فى الهندسة الفراغية ان الزاوية بين مستويين أو ميل أى مستوى على آخر هى الزاوية بين مستقيمين مرسومين من أى نقطة على خط تقاطعهما وعمودين عليه وكل من المستقيمين فى مستو منهما على التوالى .

فمن شكل نمرة ١٣٦ نرى أن المستويين ى حـ ؤ ا ب متقاطعان فى الخط حـ حـ فلو رسم المستقيم ك ن فى المستوى ى حـ عموداً على خط التقاطع حـ حـ من النقطة ن .



( شكل ١٣٦ )

ومن نفس النقطه ن رسم ن هـ عموداً على حـ حـ وفى المستوى ا ب .

كانت الزاوية الزوجية بين المستويين ى حـ ؤ ا ب هى الزاوية θ بين ك ن ؤ هـ ن أو الزاوية ك ن هـ وهى ميل كل من المستويين على الآخر

ويلاحظ ان كل من ك ن ؤ ن هـ عمود على المستقيم حـ حـ من نقطة واحدة عليه فيكون مستويهما ل ك هـ عمود على حـ حـ النظرية الثالثة صفحة ٦ .

وينتج من ذلك انه اذا اريد ايجاد ميل اى مستويين متقاطعين على بعضهما يقطع المستويان بمستو عمودى على خط تقاطعهما فتكون الزاوية بينهما هى الزاوية بين خطى تقاطعهما مع المستوى العمودى .

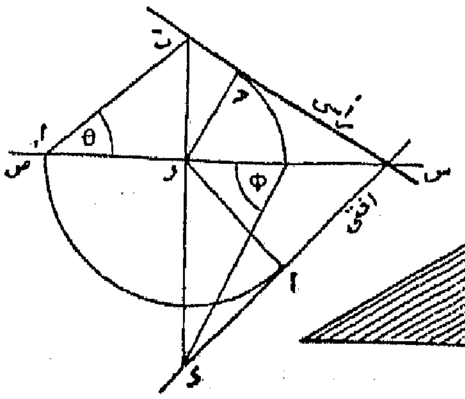
فى الشكل المستوى ل ك هـ عمودى على كل من المستويين ى ب ؤ ا ب لانه

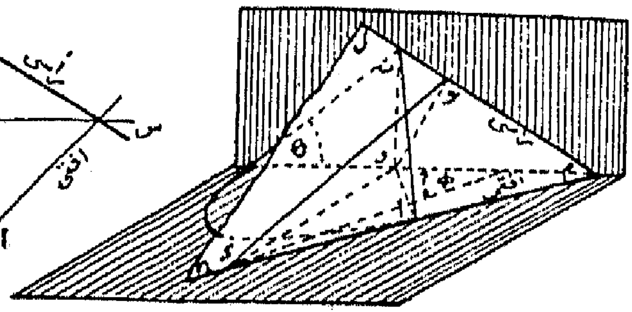
عمود غير موجودة على خط تقاطعهما ﺣ ﺣ عكس النظرية الخامسة صفحة ٩

فزاوية ميل احد المستويين على الآخر هى لزاوية بين ك ه ق ه ﻫ وهما خطى تقاطع المستويين ى ﺣ ق ا ب مع المستوى العمودى عليهما ل ك ﻫ كما ذكر .

**مسألة ١٩ — تعيين ميل اى مستوى فراغى معلوم اثراه على كل من مستويى المسقط**

المفروض — الاثر الرأسى والافقى المستوى ل م ه شكل (١٣٧)





(شكل ١٣٨)　　　　　　( شكل ١٣٧)

والمطلوب ايجاد ميل هذا المستوى على كل من مستويى المسقط

العمل — الشكل المنظور ١٣٧ يبين المستوى ل م ه بالنسبة لمستويى المسقط فى الفراغ وفيه الخط ا ب عمود على الاثر الافقى م ه من النقطة ا والخط ا و فى المستوى الافقى وعمود على هذا الاثر من النقطة ا ايضا

فمن التعريف يكون ميل المستوى ل م ه على المستوى الافقى هو الزاوية ب ا و وليكن مقدارها الحقيقى هو θ

فبدوران المثلث ب ا و حول الخط ب و الى أن ينطبق على المستوى الرأسى يمكن ايجاد المقدار الحقيقى لتلك الزاوية وهذه العملية موضحة بشكل نمرة ١٣٨ الغير منظور وهى كالآتى

نأخذ نقطة مثل و على خط الارض ونرسم منها الخط و ا عموداً على الاثر الافقى م ه ومن و نقيم العمود و ب على خط الارض الى أن يلاقى الاثر الرأسى فى

فى بَ فيكون الخط ب و هو عين الخط ب و فى المنظور والخط و ا هو عين الخط و ا فى الشكل المنظور أيضا

فاذا ركزنا فى و وبنصف قطر يساوى و ا ورسمنا قوسا ا ا، ليقطع خط الارض فى ا، لكان الخط و ا، هو نفس الخط و ا بعد انطباقه على المستوى الرأسى فنصل بَ ا، يكون هو الضلع الثالث المثلث بعد الانطباق ويكون بَ ا، و هو الشكل الحقيقى المثلث ب ا و فى الشكل المنظور .

وعليه تكون الزاوية θ او ميل المستوى ل م ه على المستوى الافقى هى الزاوية ب ا، و .

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد الزاوية Φ وهى زاوية ميل المستوى ل م ه على المستوى الرأسى وهذا واضح بالشكل وهى الزاوية وحـ ى

ونرى ايضا فى الشكل المنظور والغير منظور : —

أولا — ان القوس ا ا، هو جزء من محيط قاعدة مخروط قائم قاعدته فى المستوى الافقى .

ثانيا — ان محور هذا المخروط هو الخط ب و موجود فى المستوى الرأسى

ثالثا — ان مركز قاعدة المخروط هو النقطة و الموجودة على خط الارض

رابعا — وان الخط ا ب هو احد رواسم المخروط المذكور .

خامسا — ان ميل هذا الراسم على القاعدة هو عين ميل المستوى ل م ه على المستوى الافقى ويساوى الزاوية θ .

سادسا — أن المستوى ل م ه مماسا لهذا المخروط فى خط واحد وهو الراسم ا ب .

ويمكن ملاحظة ذلك كله بالنسبة لزاوية Φ وهى ميل المستوى ل م ه على المستوى الرأسى فهى ميل راسم مخروط آخر قاعدته فى المستوى الرأسى ومركزه و على خط الارض ومحوره و ى فى المستوى الافقى وان المستوى ل م ه مماسا لهذا المخروط فى الراسم حـ ى .

ويلاحظ أنه ليس من الضرورى أن يقع مركزى قاعدتي المخروطين المتقدم ذكرهما على نقطة واحدة مثل و بل يمكن أن ينتخب مركزان مختلفان لقاعدتيهما .

الطريقة المتقدمة الذكر يمكن العمل بها فى كل مستو معين اثراه الآ اذا كان الاثران متوازين كما بشكلى نمرة ١٢٧و١٣٠

فيكفى بعد ايجاد ميل المستوى على أحد مستويي المسقط ولتكن $\theta$ مثلا ان نقول أن مقدار الزاوية $\Phi$ هو ( ٩٠° — $\theta$ )

أما فى الاشكال الثلاثة من نمرة الى نمرة فليس من الضرورى استعمال أى طريقة لايجاد زاوية $\theta$ أو $\Phi$ أذ أن فى تلك الاحوال زاوية $\theta$ هى عين ميل الاثر الرأسى مع خط الارض و $\Phi$ هى عين ميل الاثر الافقى مع خط الارض .

وفى حالة عدم وجود الأثر رأسى للمستوى كما بشكل نمرة ١٢٥ تكون $\theta$ هى ١٨٠° و $\Phi$ هى ٩٠°

وفى حالة عدم وجود الأثر افقى له كما بشكل نمرة ١٢٦ تكون $\theta$ هى ٩٠° و $\Phi$ هى ١٨٠ .

**مسألة ٢٠ ـ طريقة تعيين أثرى مستو معلوم ميله على كل من مستويى المسقط**

**المفروض** — الزاوية $\theta$ هى زاوية ميل أى مستو على المستوى الافقى وزاوية $\Phi$ هى ميله على المستوى الرأسى .

**المطلوب** — رسم أثرى هذا المستوى

**العمل :** — هذه العملية هى عكس العملية السابقة فى بند ١٦ ولحلها طريقتان.

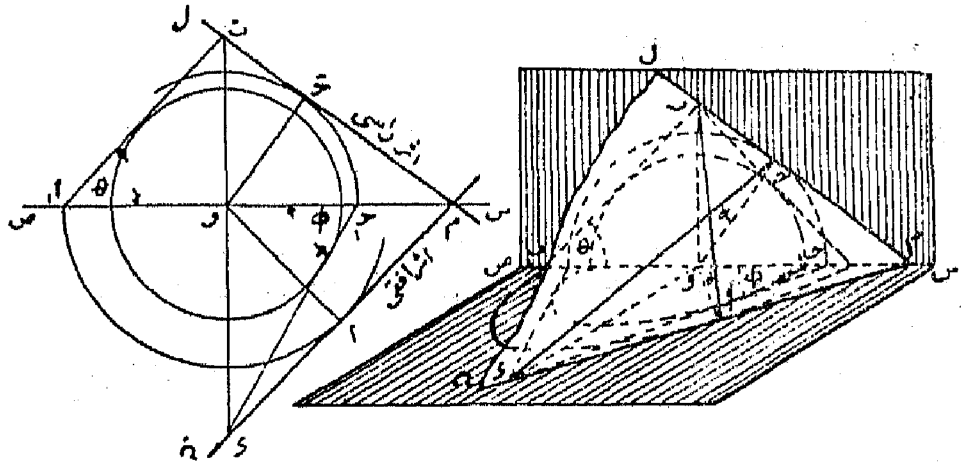
**الطريقة الاولى :** — وهى طريقة المخروطين السابق الكلام عليهما فى البند المذكور .

فالمخروط الاول تكون قاعدته فى المستوى الافقى ومحوره فى المستوى الرأسى وزاوية ميل راسمه مع قاعدته هى $\theta$ .

والمخروط الثانى تكون قاعدته فى المستوى الرأسى ومحوره فى المستوى الافقى وزاوية ميل راسمه على قاعدته هى $\Phi$

والمستوى المطلوب يكون مماسا لكل من المخروطين فى احدى رواسمه على التوالى .

فاسهل طريقة لرسم هذين المخروطين بحيث يمكن أن يمسهما مستو واحد هى ايجاد الكرة المشتركة بينهما أعنى الكرة المماسة للمخروطين من الداخل بعد تقاطعهما بحيث ينطبق مركزها على مركزى قاعدتى المخروطين المذكورين فيكون مركز الثلاثة فى نقطة واحدة على خط الارض .



شكل ( ١٣٩ )

ففى الشكل ١٣٩ انتخبت النقطة و على خط الارض لتكون مركزاً للكرة وركزنا فى و وبنصف قطر مناسب ورسمنا دائرة لتمثل المسقط الافقى والرأسى لتلك الكرة المراد رسمها

فاذا رسمنا الخط بَ ا، ليمس الدائرة المذكورة ويميل بزاوية $\theta$ مع خط الارض فى نفس الوقت يكون بَ ا، هو راسم المخروط الاول المنطبقة قاعدته على المستوى الافقى .

ولو رسمنا الخط و بَ عموداً على خط الارض ليقابل بَ ا، فى بَ يكون و بَ هو محور هذا المخروط ورأسه هى نقطة بَ

وبالمثل لو رسم ى هـ، مماسا للدائرة نفسها ويميل بزاوية $\varphi$ مع خط الأرض ويقابله فى هـ، يكون ى هـ، هو راسم المخروط الثانى الذى قاعدته فى المستوى الرأسى

ولو رسم من و المستقيم و ء عمودا على خط الأرض ليقابل حـ ء فى ء تكون ء هى رأس المخروط الثانى .

ولرسم مسقط قاعدة المخروط الاول نركز فى و وبنصف قطر يساوى و ا، ونرسم ا، ا يكون هذا القوس هو جزء من المسقط الأفقى لقاعدة المخروط الأول الذى يمسه المستوى المطلوب .

وحيث ان تلك القاعدة موجودة على المستوى الأفقي فلا بد أن يكون الأثر الأفقى للمستوى المطلوب مماسا لها .

وبالمثل لو ركزنا فى و وبنصف قطر يساوى و حـ، ورسمنا قوسا حـ، حَ يكون هذا القوس هو جزء من قاعدة المخروط الثانى الذى يمسه الأثر الرأسى للمستوى المطلوب أيضا .

وحيث ان كل من رأسى المخروطين الأول والثانى بَ ى ء هما فى المستويين الرأسى والأفقى على التوالى لأن محور الأول فى المستوى الرأسى ومحور الثانى فى المستوى الأفقى ولا بد من وقوعهما أيضا على المستوى المطلوب لأنهما يقعان على راسمى المخروطين .

فلو رسمنا من بَ مماسا للقوس حـ، حَ وليكن بَ م يكون هو الأثر الرأسى المستوى ولو رسمنا من ء المماس ء م للقوس ا، ا يكون هو الأثر الافقى للمستوى .
وهذان الاثران لا بد من تقابلهما على خط الارض كما سبق فى نقطة واحدة مثل م

والشكل المنظور نمرة (١٣٩) يوضح مواضع المخروطين والمستوى المطلوب فى الفراغ بالنسبة لمستوى المسقط وفيه

و مركز الكرة والمخروطين

ى ب ا راسم المخروط الاول

ى ا، ا جزء من قاعدة هذا المخروط

ى ء حـ، راسم المخروط الثانى

ى حـ، حـ جزء من قاعدة المخروط الثانى

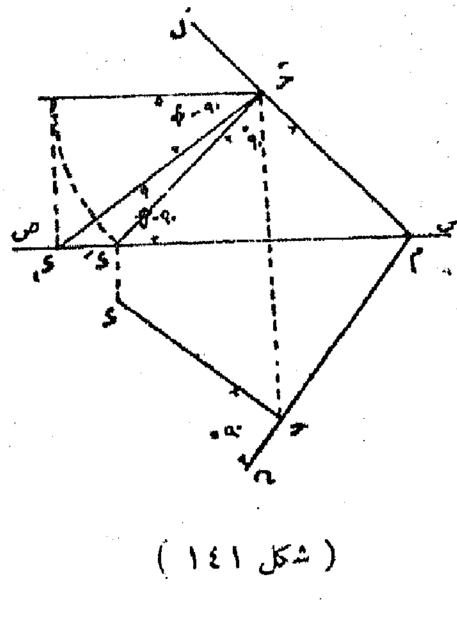
و بَ م الاثر الرأسى للمستوى المماس لقاعدة المخروط الثانى فى حـَ
و ء م الاثر الافقى لهذا المستوى المماس لقاعدة المخروط الاول فى ا
و ل م ﻫ هو المستوى المطلوب

**الطريقة الثانية** — يلزم أولا قبل البدء فى هذه الطريقة معرفة النظريتين الآتيتين وهما

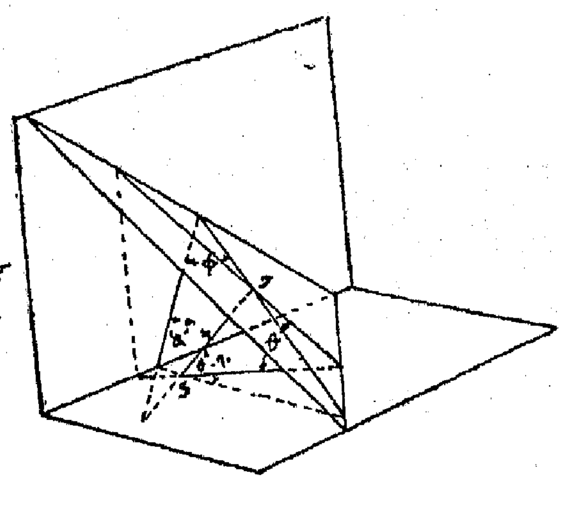
أولا — ان ميل أى مستوى على أحد مستويى المسقط هو الزاوية المتممة لميل المستقيم العمودى عليه مع مستوى المسقط المذكور

ثانيا — ان كل خط عمودى على مستو معلوم يكون مسقطاه متعامدين على أثرى ذلك المستوى كل على نظيره

والآن ليكن المفروض ان الزاوية θ و φ ميـل المستوى ل م ﻫ على المستوى الافقى والرأسى على التوالى شكل ١٤٠ و ١٤١



( شكل ١٤١ )



(شكل ١٤٠ )

والمطلوب تعيين أثرى ذلك المستوى

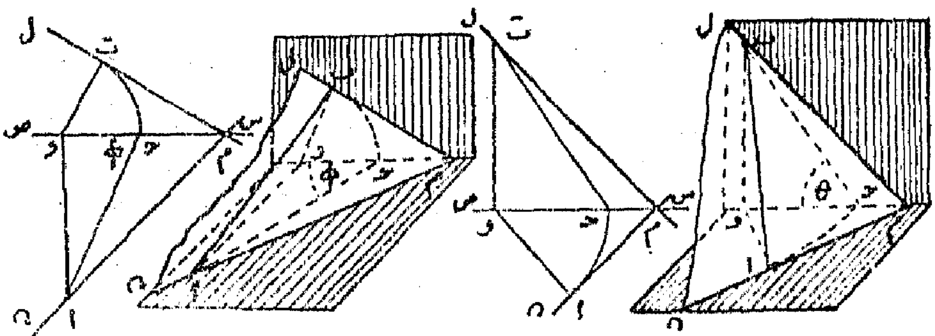
**العمل** — نرسم مسقطى اى خط مثـل حـ ء يميل بزاوية ( ٩٠ — θ ) و ( ٩٠ — φ ) على المستوى الافقى والرأسى على التوالى بالطريقـة المذكورة بمسألة

رة ١٣ صفحة ( ٦٧ ) وليكن حـ ى ى حـَ ىَ هما مسقطا ذلك الخط فيكون هذا الخط هو العمودى على المستوى المطلوب ويكون الاثر الرأسى والافقى لهـذا المستوى عمودين على المسقط الرأسى والافقى لهـذا الخط وفى الشكل ل م ى م ہ متعامدان على حـَ ىَ ى حـ ى على التوالى ومتقابلين من نقطة م على خط الارض فهما الاثران المطلوبان .

ملاحظة — اما ان يتقابل الاثران فى هذه الحالة على خط الارض وعلى بعد مناسب منه كما بالشكل أو لا يتقابلان على بعـد مناسب منه أو يكونا موازيين لخط الارض

**مسألة ٢١ — المعلوم أحد أثرى مستوى وميله على أحد مستويى المسقط والمطلوب ايجاد أثره الثانى**

**الحالة الاولى : المفروض** — ان $\theta$° هى ميل أى مستوى على المستوى الافقى وان م ا أثره الافقى شكلى (١٤٢) ى (١٤٣) والمطلوب ايجاد الاثر الرأسى لهذا المستوى



شكل ( ١٤٢ )  شكل ( ١٤٣ )  شكل ( ١٤٤ )  شكل ( ١٤٥ )

**العمل** — ننتخب أى نقطة مثل و على خط الأرض مركزا لقاعدة المخروط الرأسى القائم السابق الكلام عليه فى الطريقة الاولى من العملية السابقة

ثم نرسم و ا عمودا على م ا فيكون نقطة ا هى نقطة على أحد رواسم المخروط

المذكور ثم نركز فى و وبنصف قطر يساوى و ا ونرسم قوساً يقطع خط الارض فى حـ

ثم نرسم منها الخط حـ بَ يميل بالزاوية θ على خط الارض وهى ميل المستوى المطلوب على المستوى الافقى ثم من و نقيم العمود و بَ على خط الارض حتى يقابل حـ بَ فى بَ فيكون حـ بَ هو الراسم الذى يميل بالزاوية θ على المستوى الافقى وتكون نقطة بَ هى رأس المخروط وموجوده على الاثر الرأسى للمستوى ثم نصل م بَ يكون هو الاثر الرأسى المطلوب

**الحالة الثانية** — المفروض ان الزاوية φ هى ميل أى مستوى على المستوى الرأسى وان م ل هو الأثر الرأسى لهذا المستوى شكلى ( ١٤٤ ) و ( ١٤٥ ) والمطلوب ايجاد الاثر الافقى لهذا المستوى

**العمل** — ننتخب نقطة مثل و على خط الارض مركزا لقاعدة المخروط الثانى ثم من و ننزل العمود و بَ على الاثر الرأسى م ل

ثم نركز فى و وبنصف قطر يساوى و بَ ونرسم قوسا بَ حـ يتقابل مع خط الارض فى نقطة حـ

ثم من حـ نرسم خطا حـ ا يميل على خط الارض بالزاوية φ وهى ميل المستوى المطوب على المستوى الرأسى ومن و نقيم العمود و ا على خط الارض يقابل حـ ا فى ا يكون حـ ا هو الراسم الذى يميل بالزاوية φ وتكون ا هى رأس المخروط الموجودة على الاثر الافقى للمستوى

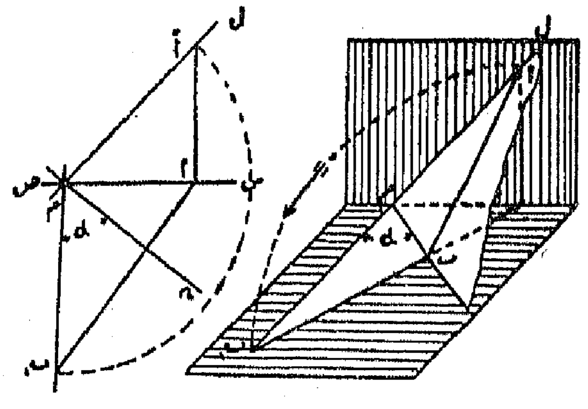
ويكون ن م هو الاثر الافقى المطلوب

**البرهان** — يمكن التحقق من صحة العملية السابقة بايجاد ميل المستوى ل م ن على كل من مستوى المسقط بعد ايجاد أثرية فكل المستقيمات التى يحتاج الى رسمها غير موجودة فى ايجاد ميل المستوى لا بد من انطباقها على نظيراتها الموجودة فى هذه العملية وهذا برهان كاف على صحتها

**مسألة ٢٢ — المطلوب تعيين الزاوية الحقيقية بين أثري اي مستوى فى الفراغ معلوم أثراه على مستوى المسقط**

**المفروض** ـ المستوى ل م ن وأثره الرأسى ل م والافقى م ن شكلى (١٤٦) و (١٤٧)

**والمطلوب** : تعيين الزاوية الحقيقية بين الاثرين .



شكل (١٤٦)　　شكل (١٤٧)

يراد بالزاوية الحقيقية بين أثرى أى مستوى الزاوية بينهما فى الفراغ حال وجود المستوى المفروض ومستويى المسقط بحالتهما الطبيعية كما فى الشكل المنظور (١٤٦) وليس المراد منها الزاوية ل م ن التى بينهما بعد انطباق مستويى المسقط شكل (١٤٧) فالزاوية المراد ايجادها اذاً هى الزاوية ا م ب وهى زاوية من المثلث ا م ب فى الفراغ وهذه يمكن ايجادها بعد ايجاد الشكل الحقيقى للمثلث ا م ب المذكور وفيه الخط ا ب عمود على الاثر الافقى م ب

**العمل** — نرسم من أى نقطة ا على خط الارض الخط ا ب عموداً على الاثر الأفقى المستوى ل م ن ثم العمود ا اَ على خط الأرض ليقابل الأثر الرأسى فى اَ فالمستقيم ا ب شكل (١٤٧) هو المسقط الافقى للمستقيم ا ب فى الشكل المنظور ويكون كل من اَ و ب هما أثرا الخط ا ب الرأسى والافقى على التوالى وتكون رؤوس المثلث ا م ب هى النقطة ا الحقيقية وهى اَ فى الشكل (١٤٧) والنقطة ب الحقيقية وهى النقطة ب فى الشكل (١٤٧) والنقطة م الحقيقية وهى م فى الشكل (١٤٧)

فاذا تصورنا دوران المستوى ل م ن حول الاثر الافقى الى أن ينطبق على المستوى الافقى .

يكون الخط ا ب دائما عمودياً على الاثر الافقى فى كل وضع الى أن ينطبق المستوى ل م ى على المستوى الافقى وينطبق الخط ا ب على امتداد مسقطه الافقى ا ب وتقع النقطة ا بعد الانطباق على امتداد ا ب عند ب٢

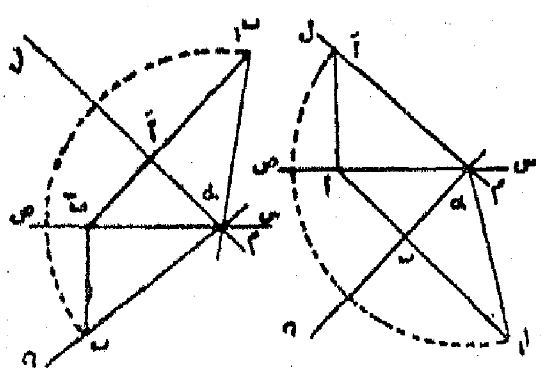
وحيث أن م اَ هو بعد حقيقى لانه فى المستوى الرأسى فيكون ثابتا بعد الانطباق أيضاً

فاذا ركزنا فى م وبنصف قطر يساوى المستقيم م اَ ورسمنا قوساً يقطع امتداد ا ب فى ب٢ يكون المثلث ا م ب قبل الانطباق هو المثلث م ب ب٢ بعد الدوران وتكون الزاوية ا م ب هى الزاوية الحقيقية ى م ب٢ بين الاثرين وهو المطلوب

**مسألة ٢٣ — المعلوم أحد اثرى مستو والزاوية الحقيقية بين أثريه والمطلوب ايجاد الاثر الثانى له**

**الحالة الاولى — المفروض** : أن م ى هو الاثر الافقى المستوى ل م ى وأن الزاوية الحقيقية بين أثريه هى a والمطلوب ايجاد أثره الرأسى شكل ١٤٨

**العمل** : نرسم المستقيم م ا١ يميل على م ى بالزاوية ب م ا١ التى تساوى الزاوية a ثم من أى نقطة منه مثل ا١ نرسم العمود ا١ ب على م ى ونمده الى أن يقابل خط الارض فى ا



( شكل ١٤٩ )　　( شكل ١٤٨ )

ثم نركز فى م وبنصف قطر يساوى م ا١ ونرسم قوساً ليلاقى العمود المقام على خط الارض من ا فى النقطة اَ فيكون رؤوس المثلث المذكورة فى العملية السابقة هى ا و م و ب ويكون نقطه اَ هى الرأس الموجودة على الاثر الرأسى فاذا وصلنا المستقيم اَم يكون هو الاثر الرأسى للمستوى ل م ى وهو المطلوب

**الحالة الثانية — المفروض** : أن م ل هو الاثر الرأسى المستوى ل م $\alpha$ وأن الزاوية الحقيقية بين أثريه هى $\alpha$ والمطلوب ايجاد أثره الافقى شكل ١٤٩

**العمل** — نرسم م ب١ يميل على م ل بالزاوية آ م ب١ التى تساوى الزاوية $\alpha$ ثم من أى نقطة منه مثل ب١ نرسم الخط ب١ آ عمودا على م ل ونمده الى يقابل خط الارض فى بَ

فيكون رؤوس المثلث السابقة الذكر هى النقط اَ ، م ، ب وتكون نقطة ب هى الرأس الموجودة على الاثر الافقى فنصل م ب يكون هو الاثر الافقى المستوى ل م $\alpha$ وهو المطلوب وهذه العملية عكس العملية السابقة تماماً

## ٢٧ — تقاطع المستويات فى الفراغ

أولا — ذكرنا من نتائج النظرية الثانية صحيفة (٥) فى الهندسة الفراغية أنه : —
يتقاطع الثلاث مستويات فى نقطة واحدة لأن كل اثنين منها يتقاطعان فى خط مستقيم وأن الثلاث خطوط التى تنشأ من تقاطع كل مع الآخر على التوالى لا يمكن تقابلها فى اكثر من نقطة واحدة الا اذا انطبقت على بعضها وهذا يثبت أن نقطة تلاقى أى مستوى مع مستوى المسقط هى نقطة واحدة وهى نقطة تلاقى اثريه اذا تلاقيا وأن هذه النقطة موجودة على خط الارض

ثانياً — أن المستويين : —

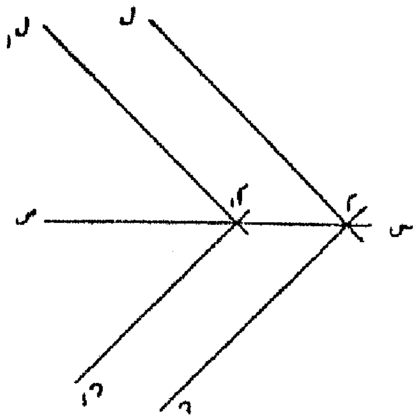
(ا) أما أن لا يشتركا فى نقطة واحدة ويقال انهما متوازيين وهذان يكون اثرا كل منهما موازيين لاثرى الآخر كل الى نظيره كما فى الشكل (١٥٠)

(ب) وأما أن يشتركا فى ثلاث نقط أو اكثر ليست على استقامة واحدة ويقال انهما منطبقان فينطبق أثرا كل منهما على أثرى الآخر

(حـ) وأما أن يشتركا فى نقطتين أو بمعنى آخر فى خط مستقيم ويقال انهما متقاطعان

ومن النتيجة (حـ) الاخيرة نرى ان المستويين انما يتقاطعان فى خط مستقيم

فاذا علمت نقطتان من هذا الخط او نقطة واحدة منه واتجاهه علم ذلك الخط والاحوال التى يتقاطع فيها مستويان فى الفراغ هى : —

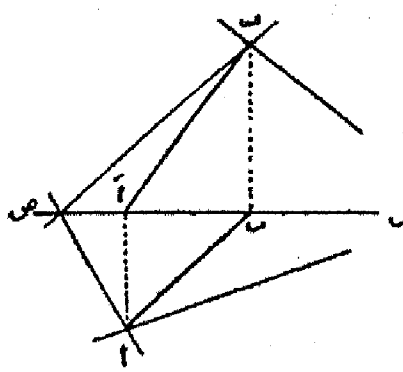


( شكل ١٥٠ )

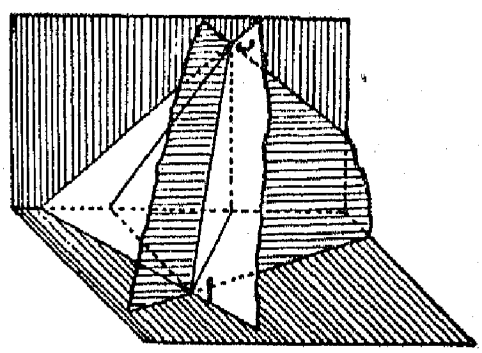
أولا — إما أن يتقاطع الاثران الرأسيان لهما فى نقطة واحدة والاثران الافقيان لهما فى نقطة اخرى وذلك على بعد مناسب من خط الارض شكلى (١٥١) و (١٥٢) فيسهل ايجاد خط تقاطعهما

فنقطة تقاطع الاثرين الرأسيين ب لا بد وأن تكون هى الاثر الرأسى لخط التقاطع ومسقطها الرأسى بَ ومسقطها الأفقى ب على خط الأرض

ونقطة تقاطع الأثرين الأفقيين ا لابد وان تكون هى الأثر الأفقى لخط التقاطع فمسقطها الافقى ا والرأسى اَ على خط الارض ويكون خط تقاطع المستويين فى هذه الحالة هو الخط ا ب ومسقطه الرأسى اَ بَ والافقى ا ب وهو المطلوب



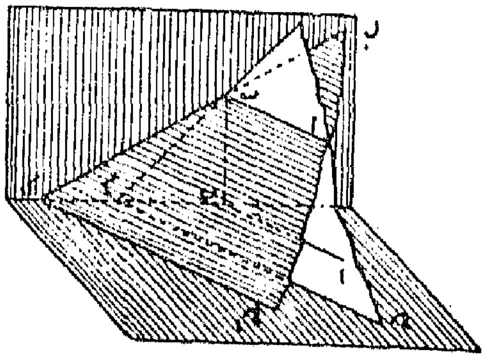
( شكل ١٥٢ )



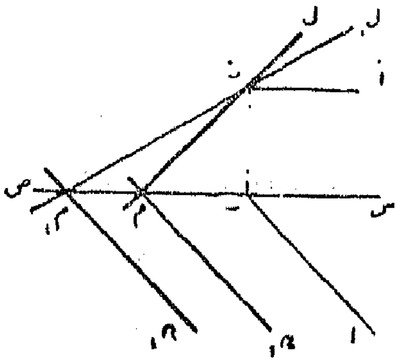
( شكل ١٥١ )

ثانيا — واما ان يتقاطع الاثران الرأسيان لهما فقط فى نقطة واحدة ويتوازى الاثران الافقيان فيتقاطع المستويان فى هذه الحالة فى خط افقى شكلى (١٥٣) و (١٥٤) فنقط تلاقى الاثرين الرأسيين ب هى الاثر الرأسى لخط التقاطع ومسقطها الرأسى هو بَ والافقى ب على خط الارض

وحيث ان الاثرين الافقيين متوازيان فلا يوجد أثر افقى لخط التقاطع واذاً يكون



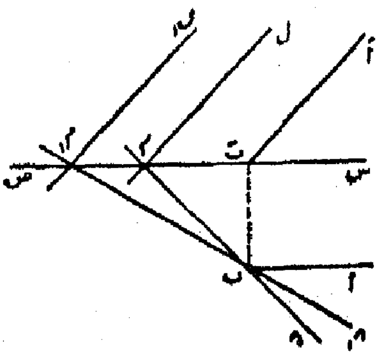
( شكل ١٥٣ )



( شكل ١٥٤ )

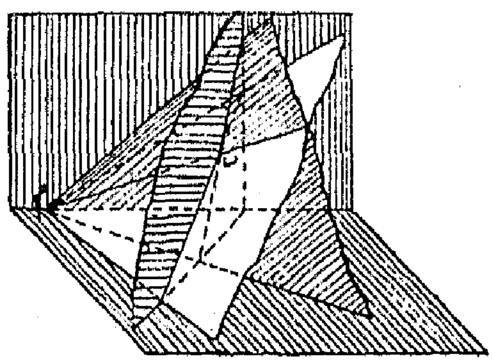
مسقطه الافقى موازيا لاحد الاثرين الافقيين ومسقطه الرأسى موازيا لخط الارض وهو الخط ب ا ومسقطه الافقى ب ا والرأسى بَ اَ وهو المطلوب

ثالثاً وأما ان يتقاطع الاثران الافقيان لهما ويتوازى الاثران الرأسيان فيتقاطع المستويان فى هذه الحالة فى خط مواز لمستوى الرأسى شكل ( ١٥٥ ) فنقطة تلاقى الاثرين الافقيين ب هى الاثر الافقى لخط التقاطع ومسقطها الافقى هو ب والرأسى على خط الارض بَ ويكون المسقط الافقى للخط هو ا ب والرأسى له اَ بَ

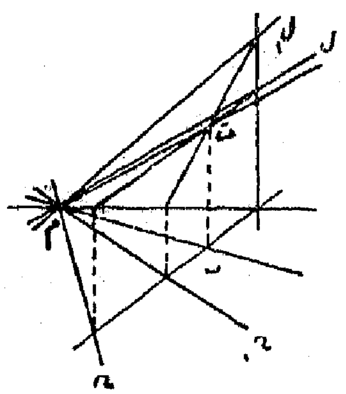


شكل (١٥٥)

رابعا — وأما ان يتقاطع الاثران الرأسيان والافقيان معاً فى نقطة واحدة على خط الارض وفى هذه الحالة يتقاطع المستويان فى خط مار بخط الارض كما بشكلى ١٥٦ و ١٥٧



( شكل ١٥٦ )



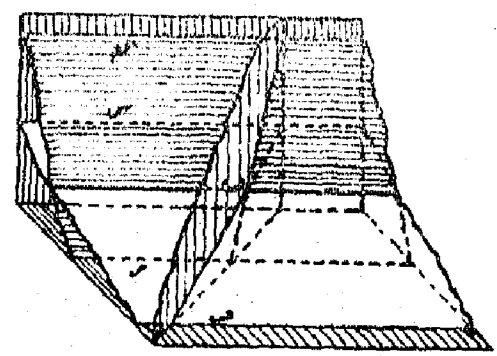
( شكل ١٥٧ )

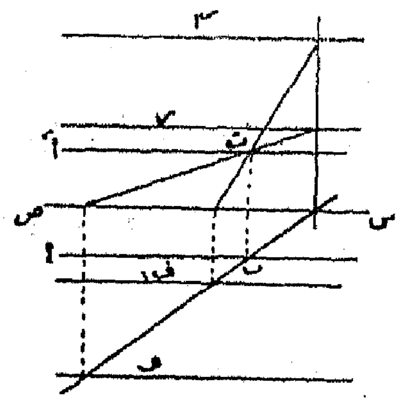
فنقطة تلاقى الاثرات الاربعة م هى الاثر الرأسى والافقى لخط التقاطع فتكون م

المسقط الرأسى والافقى لاحدى نهايتى خط التقاطع فلايجاد نقطة أخرى عليه يقطع المستويان بمستو ثالث عمودى على المستوى الافقى مثلا ومائل على المستوى الرأسى كما بالشكلين ١٥٦ و ١٥٧

وهذا المستوى الاخير يتقاطع مع كل من المستويين المفروضين فى خط مستقيم وخطا التقاطع يتقاطعان فى نقطة واحدة موجودة على كل من المستويين الاصليين فهى اذاً نقطة على خط تقاطعهما ولتكن ب بَ ويكون المسقط الرأسى لخط التقاطع هو بَ مَ ومسقطه الافقى ب م وهو المطلوب

خامسا — واما ان تتوازى الاثرات الاربعة ويوازى كل منهما خط الارض فيتقاطع المستويان فى خط موازٍ لخط الارض ويكفى لايجاد خط التقاطع ايجاد نقطة واحدة عليه لأن اتجاهه موازٍ لخط الارض كما بشكلى (١٥٨ و ١٥٩)


(شكل ١٥٨)


(شكل ١٥٩)

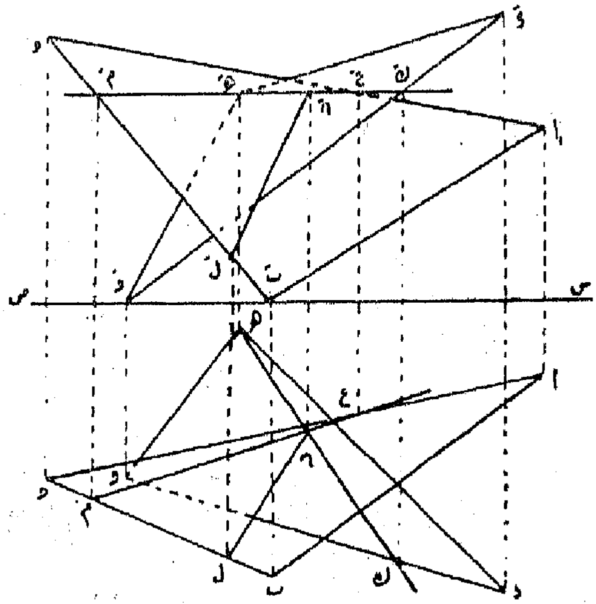
ولايجاد النقطة المطلوبة يقطع المستويان بمستوى عمودى كما سبق فى الحالة الرابعة فخطا تقاطع المستوى الثالث لكل من المستويين يتقاطعان فى نقطة على خط تقاطعهما ولتكن النقطة بَ ب هى تلك النقطة فيكون بَ اَ و ب ا هو خط التقاطع وموازٍ لخط الارض وهو المطلوب

وقد علمنا مما سبق انه يتعين المستوى بثلاث نقط ليست على استقامة واحدة فاذا علم مسقطى أى مثلث علم مستوى ذلك المثلث واذا تقاطع مثلث بآخر فى الفراغ مثلا يمكن ايجاد خط تقاطع المثلثين بايجاد خط تقاطع مستويى تلك المثلثين وكذا

يمكن ايجاد خط تقاطع أى شكل مستوٍ فى الفراغ بآخر اذا علم مسقطى كل من الشكلين والطريقة الآتية توضح كيفية ايجاد خط تقاطع مثلثين مستويين ببعضهما معلوم مسقطا كل منهما .

**مسألة ٢٤ — طريقة ايجاد خط تقاطع مثلثين مستويين ببعضهما بمعلومية مسقطى كل منهما**

**المفروض** — ان اَ بَ حَ و ا ب حـ المسقطين الرأسى والافقى للمثلث ا ب حـ على التوالى وان ءَ هَ وَ و ء هـ و هما المسقطان الرأسى والافقى المثلث ء هـ و على التوالى شكل (١٦٠) والمطلوب ايجاد خط تقاطع المثلثين « او خط تقاطع مستويهما »



شكل (١٦٠)

**العمل** — نقطع كل من المثلثين ا ب حـ و هـ ء و بمستوٍ ثالث عمودي على المستوى الرأسى او موازٍ المستوى الافقى وليكن الاثر الرأسى لهذا المستوى هو مَ كَ فالمساقط الرأسية لجميع الاشكال الواقعة فى هذا المستوى يكون مسقطها الرأسى واقع على الاثر الرأسى له

وان هذا المستوى يقطع كل من مستوى المثلثين فى خطين فالاثر مَ كَ يقطع الضلعين حـ ا و حـ ب من المثلث ا ب حـ فى النقطتين م و ع على التوالى ومسقطيهما الرأسيين هما مَ و عَ ومسقطيهما الافقيين هما م و ع

فيكون خط تقاطع المستوى الثالث مع مستوى المثلث ا ب حـ هو الخط م عَ و م ع

وهذا الاثر أيضا يقطع الضلعين و هـ و هـ ء فى النقطتين هـ و ك على التوالى ومسقطيهما هما هَ هـ و كَ ك وخط تقاطع هذا المستوى مع مستوى المثلث ء هـ و هو الخط هَ كَ و هـ ك

وهذان الخطان يتقاطعان فى نقطة واحدة مثل ن ومسقطاها هما نَ و ن فهذه النقط موجودة فى كل من مستويى المثلثين فتكون نقطة من نقط خط تقاطع مستويى المثلثين وبنفس الطريقة نجد نقطة اخرى على خط التقاطع مثل ل ومسقطاها هما ل لَ كما بالشكل

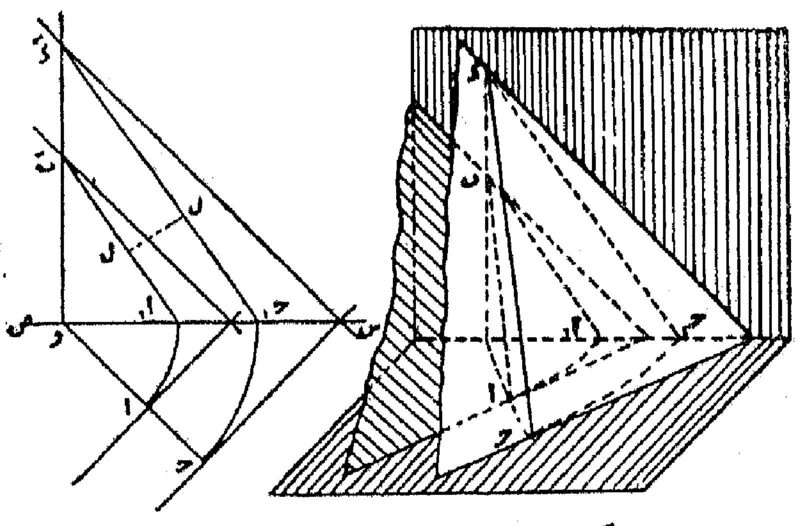
فالخط نَ لَ و ن ل هو خط تقاطع المثلثين او خط تقاطع مستويهما وهو المطلوب

## مسألة ٢٥ — ايجاد المسافة الحقيقية بين مستويين متوازيين

كل المستويات المتوازية تكون اثاراتها على كل من مستويى المسقط متوازية النظير لنظيره

**المفروض** — فى شكلى (١٦١) و (١٦٢) المنظور والغير منظور الاثران الرأسيان لمستويين متوازيين وهذان الاثران متوازيان وكذا اثراهما الأفقيين متوازيان

والمطلوب تعيين المسافة بين المستويين



(شكل ١٦٢) (شكل ١٦١)

العمل — يقطع كل من المستويين بمستوى ثالث عمودى على المستوى الافقى مثل المستوى ء و ه الذى اثره الأفقى و ه فى شكل (١٦٢) الغير منظور وعمودى على الأثرين الأفقيين للمستويين المفروضين فهذا المستوى يقطع المستويين المذكورين فى خطين متوازيين المسافة بينهما هى المسافة الحقيقية بين المستويين المفروضين

ففى شكل (١٦٢) نجد ان المسقط الافقى لكل من خطى التقاطع واقع على و ه وهو الاثر الافقى للمستوى العمودى وأن الاثر الرأسى لاحدهما هو ءَ وللاخر هو سَ

فاذا أدرنا هذين الخطين الى أن ينطبقا على المستوى الرأسى بأن نركز فى و

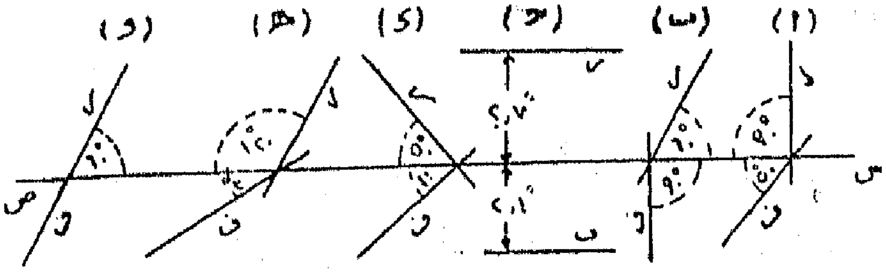
أيضاً وكان ء حـ ا يوازى ب ا، لانهما متوازيان وكانت المسافة العمودية بينهما هى المسافة الحقيقية بين المستويين وهى ل ل وهو المطلوب

**مسألة — (١٨) طريقة رسم مستو يوازى مستو آخر معلوم ويبعد عنه ببعد معلوم**

حل هذه المسألة هو عكس المسألة السابقة . يُقطع اثرى المستوى المعلوم بمستو ثالث عمودى على المستوى الافقى واثره الافقى عمودى على أثر المستوى المعلوم ثم ايجاد خط التقاطع ودورانه الى أن ينطبق على المستوى الرأسى ورسم مستقيم موازٍ له ويبعد عنه بالبعد المعلوم فيكون هو خط تقاطع المستوى الثانى المطلوب بالمستوى العمودى بعد انطباقه على المستوى الافقى ويمكن بذلك ايجاد اثرى المستوى الثانى الذى يحتوى على الخط الأخير وكل العمليات واضحة فى رسم الشكلين السابقين (١٦١) و (١٦٢) وهو المطلوب

## تمرين (٤)

### على المستويات الفراغية بالنسبة لمستويى المسقط




( شكل ١٦٣ )

( ١ ) شكل ١٦٣ يبين أثرى مستو معلوم فى حالات ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و والمطلوب تعيين زاوية ميل المستوى فى كل حالة على كل من مستويى المسقط

( ٢ ) بين مقدار الزاوية الحقيقية بين اثرى المستوى فى الحالات ا ، ب ، حـ شكل ( ١٦٣ )

( ٣ ) بين مقدار الزاوية الحقيقية بين اثرى المستوى فى الحالات ء ، هـ ، و شكل ( ١٦٣ )

( ٤ ) ارسم اثرى المستوى الذي يميل مع المستوى الافقى بزاوية مقدارها ٦٠° والذى يميل اثره الرأسى بزاوية ٤٥° مع خط الارض

( ٥ ) ارسم اثرى المستوى الذى يميل مع المستوى الرأسى بزاوية ٥٠° والذي يميل اثره الرأسى مع خط الارض بزاوية مقدارها ٥٠°

( ٦ ) أرسم أثرى المستوى الذى يميل مع المستوى الافقى بزاوية ٥٥° والذى أثره الرأسى يوازى خط الارض و يبعد عنه بمقدار ٥ سم

( ٧ ) ارسم أثرى المستوى الذى يميل على المستوى الافقى والرأسى بالزاويتين ٥٥° ، ٦٠° على التوالى

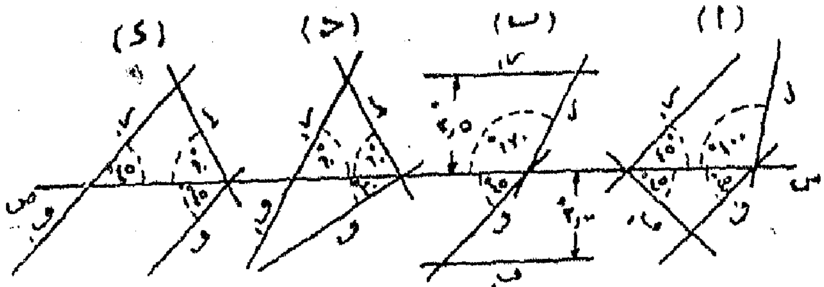
( ٨ ) ارسم اثرى المستوى الذى يميل على كل من المستويين الافقى والرأسى بالزاويتين ٥٠° ، ٤٠° على التوالى

( ٩ ) اذا كانت الزاوية الحقيقية بين اثرى مستوى هى ٦٠° و يميل اثره الرأسى

بالزاوية ٣٥° مع خط الارض . المطلوب رسم اثرى هذا المستوى

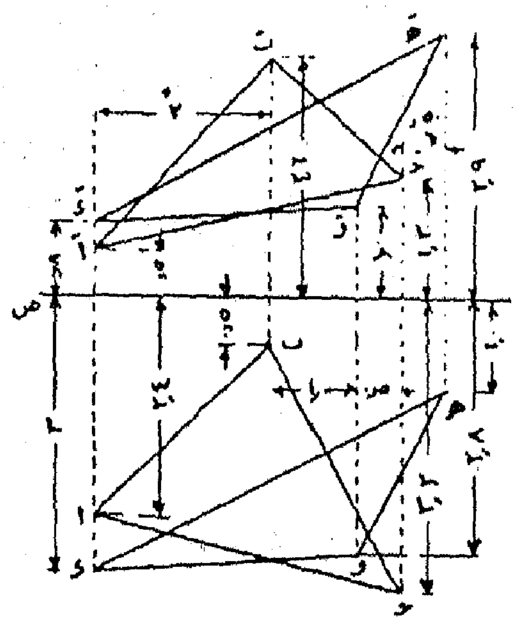
(١٠) ارسم أثرى المستوى الذى يميل مع المستوى الافقى بزاوية ٥٠° اذا كانت الزاوية الحقيقية بين أثريه هى ٧٠°

(١١) ارسم أثرى المستوى المتساوى الميل على كل من مستويى المسقط اذا كانت الزاوية الحقيقية بين اثريه هى ٦٠°



( شكل ١٦٤ )

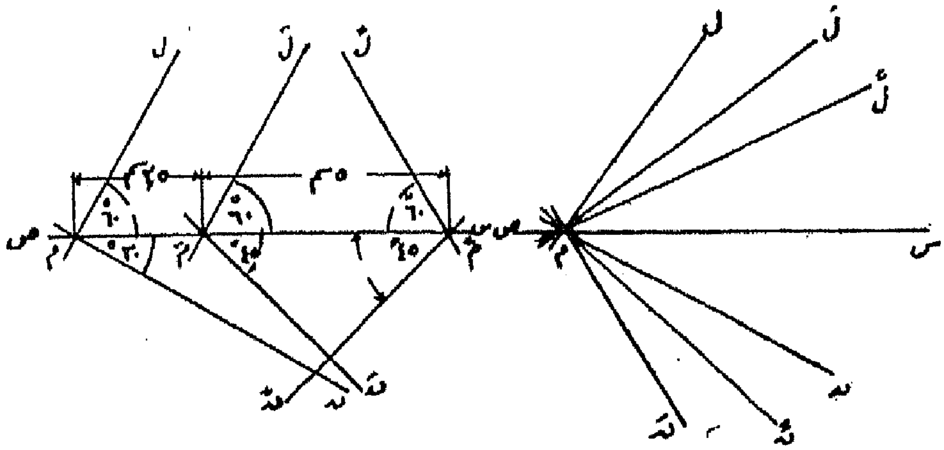
(١٢) شكل ١٦٤ يبين مستويين متقاطعين فى الحالات ا و ب و حـ و ء أوجد فى كل حالة منها المسقط الرأسى والافقى لخط تقاطع المستويين



( شكل ١٦٥ )

(١٣) أوجد خط تقاطع المثلث المستوى آ بَ حَ و ا ب حـ شكل ١٦٥ مع المثلث المستوى ءَ هَ وَ و ء هـ و بفرض أن الابعاد المبينة بالشكل كلها بالبوصة

(١٤) أوجد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المتقاطعة المبينة فى شكل (١٦٦) ٥ ب وفى شكل ا يمكن انتخاب أى ميل ملائم للاثرات الست بالنسبة لخط الارض



شكل (١٦٦)

(١٥) المفروض مستويان متوازيان وموازيان لخط الارض وكان الاثر الافقى للأول تحت خط الارض بمقدار ٧ سم والأثر الافقى للثانى تحته بمقدار ٥ سم وكان الاثر الرأسى للأول فوق خط الارض بمقدار ٥ سم

أوجد الأثر الرأسى للثانى والبعد بين المستويين فى الفراغ

(١٦) ارسم المستوى الذى يوازى المستوى فى كل حالة من الحالات ا ٥ ب ٥ حـ ٥ ء ٥ هـ ٥ وفى المسألة نمرة ١ ويبعد عنه بمقدار ٢ سم

# الفصل السابع

## فى الخط المستقيم والمستوى

٢٨ — نبدأ هذا الباب بذكر نظريتين هامتين وهما :

**النظرية الاولى — كل مستو يحتوى على خط مستقيم يحتوى أثراه على أثرى هذا الخط**

**البرهان** — أثرا الخط المستقيم هما نقطتا تقاطعه مع كل من مستويى المسقط ولكنهما أيضا نقطتان من نقط المستوى المحتوى على هذا الخط فيجب اذاً أن يقطع كل من هذين الاثرين على خطى تقاطع المستوى المحتوى عليه مع مستويى المسقط على التوالى أو بمعنى آخر على أثرى ذلك المستوى وهو المطلوب

وشكل (١٦٧) المنظور يبين الخط ا ب الموجود فى المستوى ل م ه الذى أثراه الرأسى والافقى هما ل م ى م ه على التوالى ويبين الاثر الرأسى له وهو ب واقع على ل م وأثره الافقى ا واقع على م ه

**النظرية الثانية — كل مستقيم يوازى أحد مستوى المسقط فانه يوازى أيضا اثر أى مستوى يحتوى عليه على نفس مستوى المسقط**

فشكل (١٦٧) المنظور يبين الخط حـ ى (الذى يوازى المستوى الافقى) وموجود فى المستوى ل م ه وفيه الخط حـ ى لا بد وأن يوازى م ه وهو أثر المستوى ل م ه على المستوى الأفقى وهذا لان م ه ما هو إلا خط مستقيم موجود فى المستوى الافقى فلا يمكن ان الخط حـ ى يلاقيه أبدا لانه يوازى المستوى الافقى وهو المطلوب

وعلى هذا يستنتج : —

أولا — أن حـ ى المسقط الأفقى للمستقيم حـ ى يوازى م ه أيضا (نظرية ١٢ نتيجة ٢)

ثانيا — أن حـَ ىَ مسقطه الرأسى يوازى خط الأرض لأن حـ ى خط أفقى

ثالثا — أن الخط حـ ى ليس له الا أثر رأسى فقط لانه لا يقابل المستوى الافقى

وكل هذا واضح فى الشكل

وفى الشكل ١٦٧ أيضا نرى أن الخط ى هـ يوازى المستوى الرأسى وموجود فى المستوى ل م ن ويستنتج كما تقدم أنه

أولا — أن هذا الخط يوازى الاثر الرأسى ل م للمستوى المحتوى عليه

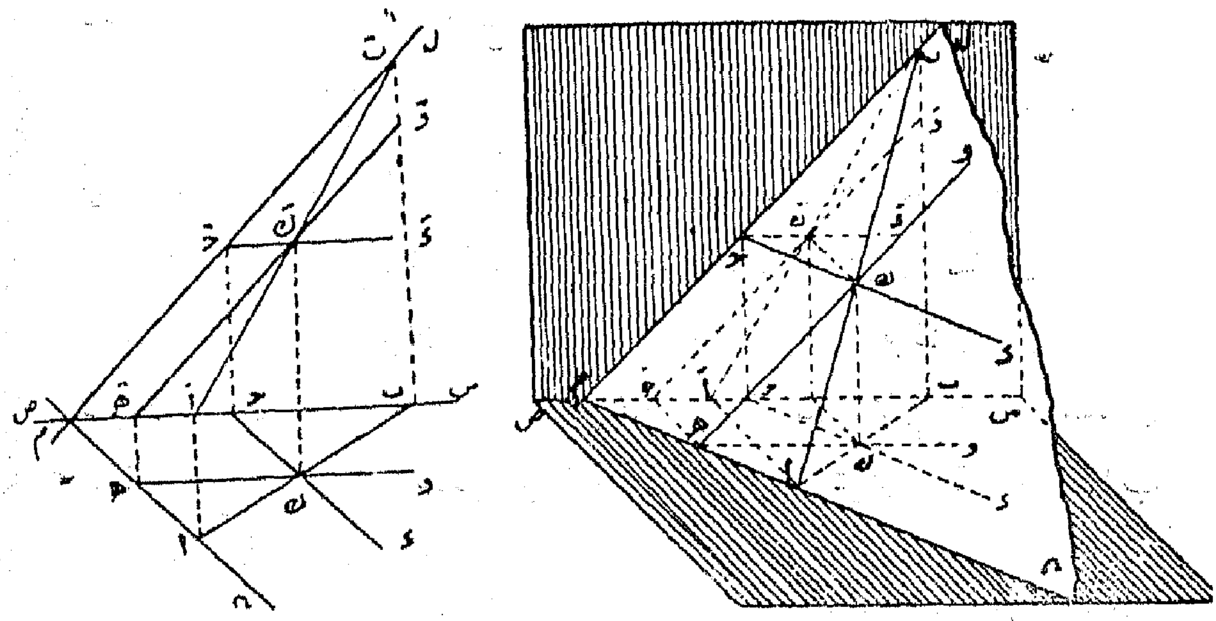
ثانيا — أن المسقط الرأسى لهذا الخط يوازى الاثر الرأسى المستوى ل م ن

ثالثا — أن المسقط الأفقى لهذا الخط يوازى خط الأرض لأنه يوازى المستوى الرأسى

رابعا — أنه ليس لهذ الخط الا أثر أفقى لانه لا يقابل المستوى الرأسى

**ملاحظة** — سيرى الطالب أنه كثيرا مايرجع الى النظريتين المتقدمتين عند حل كثير من المسائل المستقبلة

**مسألة (١٩) : المفروض المستوى ل م ن ك هى المسقط الافقى لنقطة ما على هذا المستوى والمطلوب تعيين مسقطها الرأسى شكل (١٦٧)**



شكل (١٦٧)

**العمل — الطريقة الاولى** — نرسم الخط اب يمر بالنقطة ك المفروضة ونمده ليقطع الاثر الافقى للمستوى فى ا ويقطع خط الأرض فى ب فاذا اعتبرنا أن ا ب هو

المسقط الأفقى لخط مستقيم مار بالنقطة ك فان أثره الأفقى هو ا ونقطة ب هى المسقط الافقى لاثره الرأسى فمن السهل ايجاد المسقط الرأسى لهذا الخط وهو اَ بَ ولا بد أن يكون المسقط الرأسى للنقطة ك على اَ بَ ويمكن ايجادها باسقاطها من ك ولتكن كَ وهو المطلوب انظر الطريقة موضحة بالشكل ١٦٧

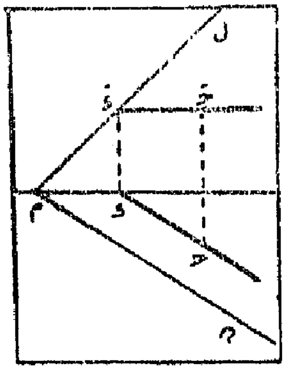
الطريقة الثانية — يمكن بدلا من رسم أى مستقيم مثل ا ب يمر بالنقطة ك أن نرسم مستقيما مثل حـ ء يمر بها بحيث يوازى الاثر الافقى للمستوى وهو م ن ونمده الى أن يقابل خط الارض فى حـ وحيث أن حـ ء يوازى م ن يكون مستقيما أفقيا و يكون مسقطه الرأسى موازيا لخط الارض وبما أنه يمكن ايجاد أثره الرأسى باقامة عمود من حـ على خط الارض ليقابل الاثر الرأسى للمستوى ل م ن فى حـَ فاذا رسمنا من حـَ خط يوازى خط الارض مثل حـَ ءَ يكون حـَ ءَ هو المسقط الرأسى للخط حـ ء الذى يحتوى على المسقط الرأسى للنقطة ك و يكون من السهل ايجاد مسقطها الرأسى وهو كَ

الطريقة الثالثة — يمكن أخذ مستقيم موازى للمستوى الرأسى كالمستقيم هـ و يمر بالنقطة ك فيكون مسقطه الرأسى هـ و موازيا للاثر الرأسى ل م وهو يحتوى على المسقط الرأسى للنقطة ك فيمكن ايجاد مسقطها الرأسى شكل ١٦٧ وهو المطلوب

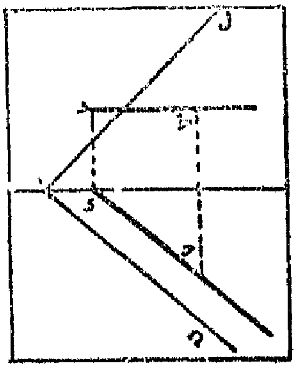
**مسألة (٢٨) طريقة رسم مسقطى خط افقى فى مستو معلوم من نقطة معلومة عليه**

**المفروض** : المستوى ل م ن شكل (١٦٨) ونقطة حـ موجودة عليه ومسقطها الافقى حـ والرأسى حـَ والمطلوب رسم المسقط الافقى والرأسى لخط مستقيم يوازى المستوى الافقى وموجود فى المستوى ل م ن ويمر بالنقطة حـ

**العمل** — من النقطة حـ وهى المسقط الافقى لنقطة حـ نرسم مستقيما موازيا للاثر الافقى م ن وليكن حـ ء ومن النقطة حـَ نرسم مستقيما موازيا لخط الارض وليكن حـَ ءَ فيكون حـ ء و حـَ ءَ هما المسقطان الأفقى والرأسى للخط المطلوب على التوالى شكل (١٦٨) وهو المطلوب




شكل (١٦٨)




شكل (١٦٩)

**البرهان** — معلوم ان كل خط أفقى مسقطه الرأسى موازيا لخط الارض وحيث أنه يمر بالنقطة ه فلابد وأنه يمر بمسقطها الرأسى هَ

ومعلوم أيضا ان كل خط أفقى موازيا للمستوى الافقى وأن مسقطه الافقى ه ى لابد وأن يوازى م ن الاثر الأفقى للمستوى ل م ن المحتوى عليه ( النظرية الثانية صفحة ٥ وحيث أن ه ى هو مسقط خط يمر بالنقطة ه فلابد وأن يمر بمسقطها الافقى ه وهو المطلوب

**تنبيه** (١) حيث أن الخط ه ى فى المستوي ل م ن فلابد وأن يكون أثره الرأسى على الاثر الرأسى المستوى ل م ن وواضح من الشكل أن النقطة ىَ هي الاثر الرأسى للخط ه ى وموجودة على ل م أما الاثر الأفقى لهذا الخط فلا يوجد على الاثر الافقى المستوى لانه مواز للمستوى الافقى ولا يقابله أبدا

**تنبيه** (٢) يمكن بواسطة هـذه العملية ايجاد احدى مسقطى نقطة موجودة فى المستوى ل م ن بمعلومية المسقط الثانى لها كما ذكر فى العملية السابقة

**مسألة** (٢٩) — **طريقة رسم مسقطى خط افقى مواز للمستوى ل م ن من نقطة خارجة عنه**

**المفروض** المستوى ل م ن والنقطة ه خارجـة عنه ومسقطها الافقى ه والرأسى هَ ( شكل ١٦٩ )

**والمطلوب** : رسم مسقطي خط مستقيم أفقي يمر بالنقطة حـ ويوازي المستوى ل م ن

**العمل** — من حـ المسقط الافقي للنقطة حـ نرسم مستقيما موازيا للاثر الافقي ن ومن حـَ المسقط الرأسي للنقطة حـ نرسم مستقيما موازيا الى خط الارض وليكن حـَ ءَ فيكون حـ ء و حـَ ءَ هما المسقطان الافقي والرأسي للخط وهو المطلوب

**البرهان** — حيث أن الخط حـ ء خط افقي فلا بد وأن مسقطه الرأسي يوازي خط الارض وبما أن هذا الخط يمر بالنقطة حـ فلا بد وأن مسقطه الرأسي يمر بالمسقط الرأسي للنقطة حـ أي يمر بالنقطة حـَ وكذا المسقط الافقي لهذا الخط لابد وأن يوازي المسقط الافقي لخط افقي يوازيه مثل م ن وأن يمر بالمسقط الافقي للنقطة حـ أي يمر بالنقطة حـ

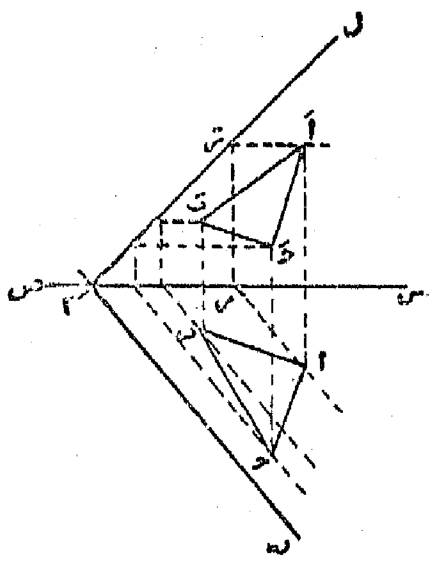
**ملاحظة** — فقط يراعى في هذه العملية أن الاثر الرأسي للخط حـ ء وهو ءَ لا يقع على أثر المستوى ل م ن لانه ليس موجودا في هذا المستوى وهذا واضح بالشكل

**مسألة ٣٠ — طريقة ايجاد احدى مسقطي أي شكل مستو موجود في مستو معلوم ومعلوم مسقطه الثاني**

**المفروض** — المستوى ل م ن والمسقط الافقي ا ب حـ للمثلث ا ب حـ الموجود في هذا المستوى شكل (١٧٠)

**والمطلوب** ايجاد المسقط الرأسي لهذا المثلث

**العمل** — معلوم أنه اذا تصورنا خط أفقي يمر بالنقطة ا يكون أولا مسقطه الافقي



(شكل ١٧٠)

موازٍ للاثر الافقي م ن وأثره الرأسي موجود على الاثر الرأسي ل م المستوى ل م ن فاذا رسمنا خطا من النقطة ا يوازي م ن ومددناه الى أن يقابل خط الارض في ر

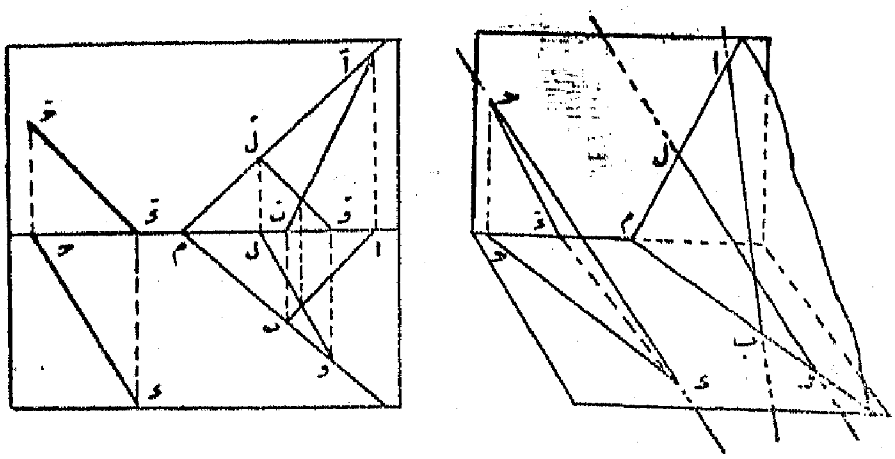
ومن س أقمنا العمود س سَ على خطة الارض ليقابل ل م فى نقطة سَ تكون س هى الاثر الرأسي لهذا الخط ويكون مسقطه الرأسى هو المستقيم سَ اَ موازٍ لخط الارض والمسقط الرأسى للنقطة ا واقع عليه فباقامة العمود من ا على خط الارض ومده الى أن يقابل سَ اَ فى اَ تكون اَ هى المسقط الرأسي للنقطة ا

وبنفس الطريقة يمكن ايجاد المسقط الرأسى لـكل من ب و حـ فينتج المسقط الرأسى المثلث ا ب حـ وهو المطلوب

تنبيه (١) يمكن بنفس الطريقة ايجاد المسقط الافقى للمثلث ا ب حـ اذا علم المسقط الرأسى له وهذا واضح ولايحتاج الى شرح

ملاحظة — ماينطبق على المثلث ينطبق على أى شكل آخر معلوم احدى مساقط رؤوسه مهما كان عددها

**مسألة ٣١ — المعلوم مساقط خطين ليسا فى مستو واحد والمطلوب تعيين أثرى المستوى الذى يحتوى على احدهما ويوازى الآخر**




شكل ( ١٧١ )

**المفروض** : أن ا ب و حـ ء مستقيمان ليسا فى مستو واحد شكل ( ١٧١ )

والمطلوب ايجاد أثرى المستوى الذى يحتوى على المستقيم ا ب ويوازى المستقيم حـ ء

**العمل** — نعين أثرى المستقيم ا ب بالطريقة المعروفة ولتكن اَ هى الأثر الرأسى له و ب هي أثره الافقى كما هو مبين بالشكل

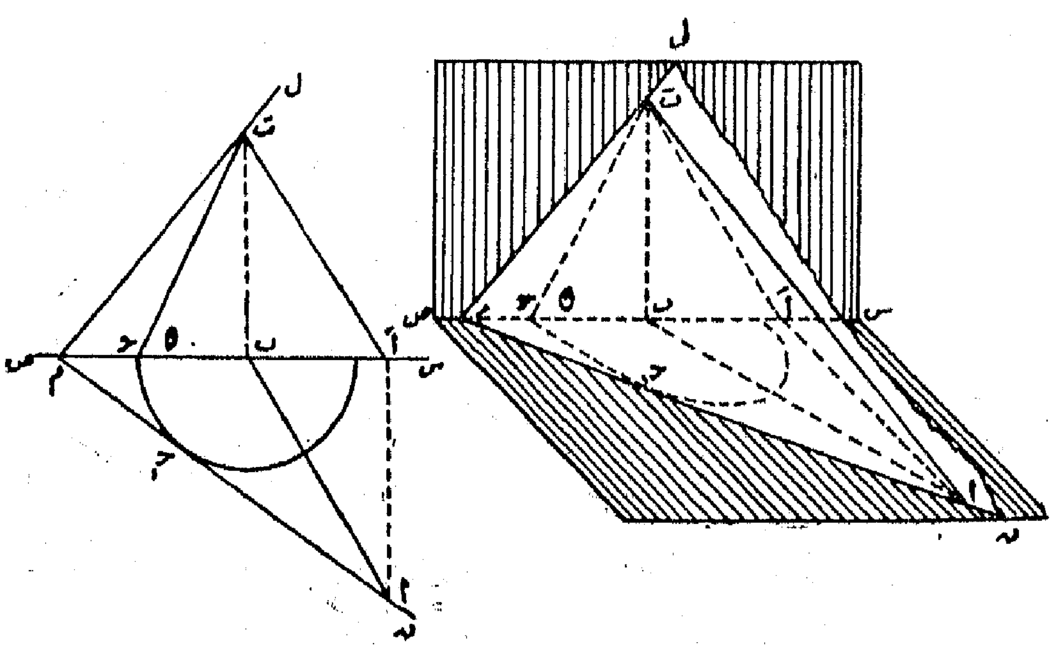
ومن أى نقطة على الخط ا ب نوسم مسقطى خط يوازى الخط حـ ء وليكن ل و ى لَ وَ هما المسقطان الافقى والرأسى لهذا الخط على التوالى

ثم نعين أثرى الخط ل و وليكن لَ ى و هما أثراه ونصل آ لَ ى و ب فيكوناهما الاثرين الرأسى والافقى المستوى المطلوب ولابد من تقابلهما فى النقطة م على خط الارض

البرهان — حيث أن المستوي يحتوى على الخط ا ب وعلى الخط الجديد ل و الموازى للمستقيم حـ ء فيكون موازيا الى حـ ء ومحتويا على ا ب نظرية (١٠) صفحة (١١) وهو المطلوب

**مسألة ٣٢ — طريقة رسم اثرى مستو يحتوى على خط مستقيم معلوم ويميل بزاوية معلومة على أحد مستويى المسقط**

المفروض — أن آ بَ ى ا ب هما مسقطا خط مستقيم ا ب شكل (١٧٢) ولتكن θ هى زاوية ميل المستوى المطلوب على المستوى الافقى

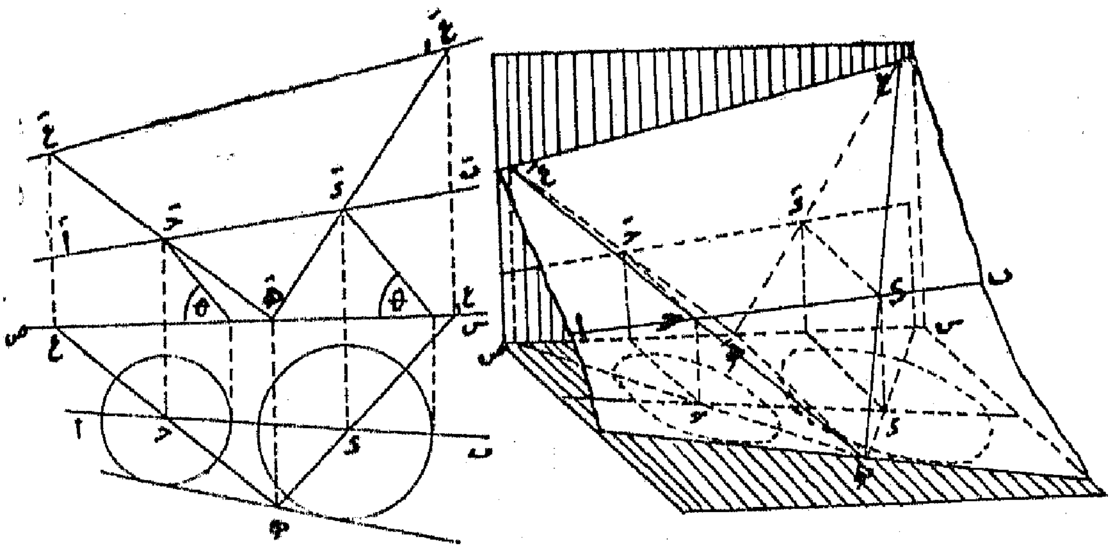


( شكل ١٧٢ )

**المطلوب** — رسم المستوى الذى يحتوى على ا ب ويميل بزاوية θ على المستوى الافقى

**العمل** — نعين أثرى المستقيم ا ب الرأسى والافقى ولتكن بَ أثره الرأسى و ا أثره الافقى ثم نرسم مسقطى المخروط الذى رأسه فى بَ وراسمه يميل θ مع خط الارض أعنى من بَ نرسم الخط بَ هـ يميل بالزاوية θ مع خط الارض ثم بنصف قطر ب هـ ونرسم قوسا يكون هو المسقط الافقى للمخروط المطلوب

ومن ا نرسم المستقيم ا م يمس القوس فى هـ، يكون ا م هو الاثر الافقى للمستوى المطلوب لانه يمس قاعدة المخروط ونمده على استقامته الى أن يقابل خط الارض فى م ثم نصل بَ م يكون هو الاثر الرأسى للمستوى المطلوب والشكل المنظور ١٧٢ يوضح ما ذكر



( شكل ١٧٣ )

**ملاحظة** — قد استعنا فى حل هذه المسألة بتعيين أثرى الخط المستقيم ا ب المعلوم فاذا وقع الاثر الأفقى ا خارج القوس هـ هـ، الذى هو المسقط الافقى للمخروط لأمكن رسم مماسين لهذا القوس وامكن اذاً رسم مستويين يفيان بالغرض المطلوب . أما اذا وقعت ا على القوس لأمكن رسم مماسا واحدا أو بمعنى آخر مستويا واحدا

أما اذا وقعت ا داخل القوس لكانت المسألة مستحيلة الحل

أما اذا لم يمكن تعيين أثرى المستقيم المعلوم داخل حدود الورقة فيتعذر حل المسألة بالطريقة السابقة ويكون العمل كالآتى : —

**المفروض** — أن أثرى المستقيم اَ بَ ، ا ب شكل ١٧٣ لا يمكن الوصول اليهما

**العمل** — نرسم مساقط مخروطين رأسيهما على نقطتين مثل حَ ، دَ ، ء على الخط ا ب المعلوم وقاعدتيهما على المستوى الافقى ورواسمهما تميل بالزاوية ө على خط الارض فيكون الاثر الافقى المستوى المطلوب هو المماس المشترك لهاتين القاعدتين أما الاثر الرأسى فيتعين بانتخاب نقطة على الاثر الافقى للمستوى مثل هَ هـ ثم نصل هذه النقطة بنقطتين أيا كانتا على المستقيم ا ب وليكونا حَ حـ ، ءَ ء

ثم نعين الاثرين الرأسيين للخطين حـ هـ ، ء هـ وليكونا عَ ، عَ١ على التوالى فالخط الواصل بين هذين الاثرين عَ عَ١ هو الاثر الرأسى المستوى وهو المطلوب

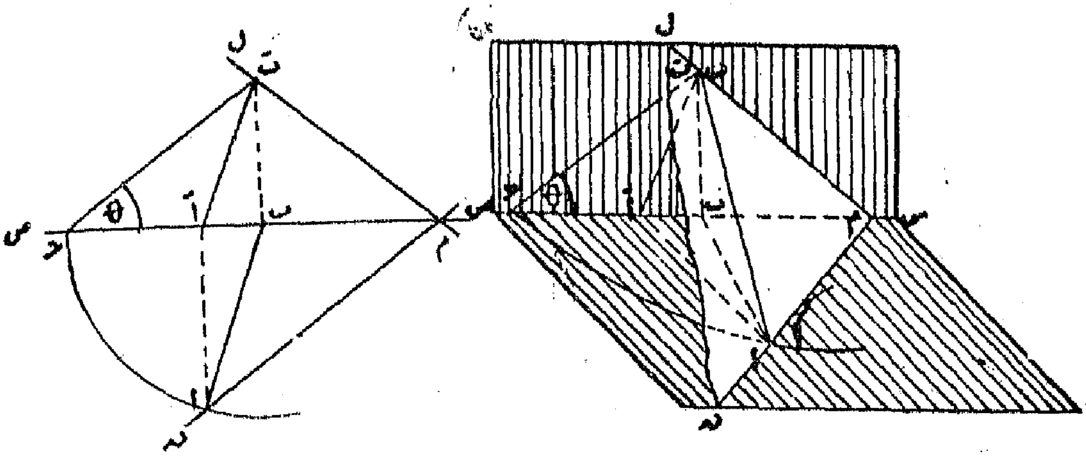
**مسألة ٣٣ — فى مستو معلوم المطلوب تعيين خط مستقيم يميل بزاوية معلومة على أحد مستوى المسقط** ( لا يمكن أن يزيد ميل الخط المستقيم عن ميل المستوى )

**المفروض** — المستوى ل م ن

**المطلوب** — تعيين مستقيم مثل ا ب فى ذلك المستوى ويميل بالزاوية ө مع المستوى الافقى مثلا (شكل ١٧٤)

**العمل** — ننتخب نقطة مثل حـ على خط الارض ونرسم منها مستقيم مثل حـ سَ يميل بالزاوية ө على خط الارض ونمده ليقابل الاثر الرأسى المستوى م ل ن فى سَ ثم من سَ نقيم العمود س ب على خط الارض وبنصف قطر ب حـ نرسم قوسا ليقابل الاثر الافقى فى ا

ثم نقيم من ا عمودا على خط الارض ليقابل خط الارض فى اَ




شكل (١٧٤)

فيكون تَ اَ المسقط الرأسى للمستقيم المطلوب و ا ب مسقطه الافقى وهو المطلوب

البرهان : — من الرسم يتضح أن بَ هى الأثر الرأسى للمستقيم المطلوب ومسقطها الافقى هو ب و بَ حـ هو مسقط المستقيم المطلوب بعد دورانه الى أن انطبق على المستوى الرأسى فيكون ميله θ هو ميله الحقيقى على المستوى الافقى وحيث أن نقطة حـ على خط الأرض بعد الدوران فتكون أيضا على خط الأرض قبل الدوران ويكون مسقطه الافقى بعد الدوران هو ب حـ ولا يتغير هذا الطول قبل الدوران وبعده

فيكون اذا ب ا الذى يساوى ب حـ هو المسقط الافقى المستقيم قبل الدوران وحيث أن ا واقعة على الأثر الأفقى للمستوى ل م ه فيكون نقطتان منه وهما ا و ب فى المستوى وعليه يكون الخط بأكمله فى المستوى . وهو المطلوب

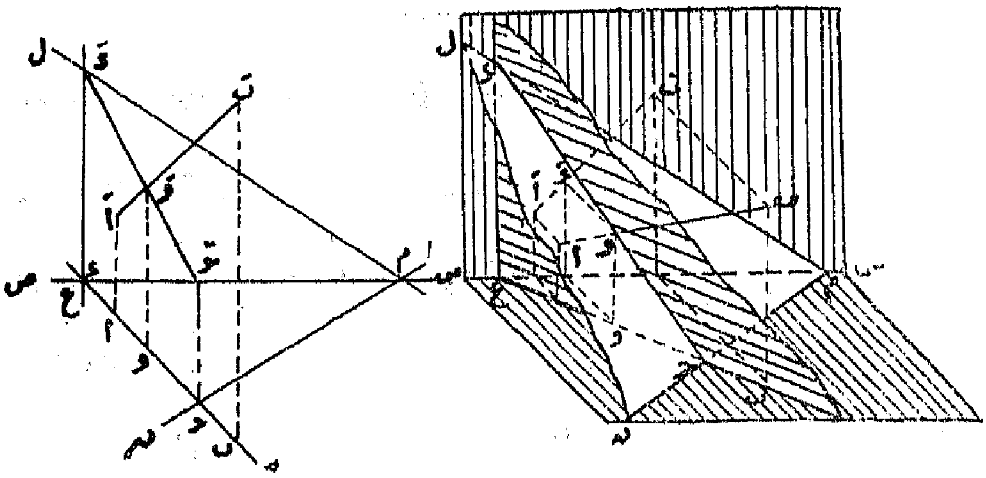
**مسألة ٣٤ — طريقة ايجاد نقطة تلاقى مستقيم معلوم بمستو معلوم**

**المفروض :** — المستوى ل م ه و المستقيم ا ب ومسقطه الرأسى اَ بَ والافقى ا ب شكل (١٧٥)

والمطلوب ايجاد نقطة المستقيم ثلاثى ا ب بالمستوى ل م ه

**العمل :** — نأخذ مستويا عموديا على احد مستويى المسقط ومحتويا على الخط ا ب مثل المستوى ء ت ع العمودى على الرأسى والذى يحتوى على الخط اب فيحتوى

اذا أثره الافقى على المسقط الافقى للمستقيم ا ب ثم نأت بخط تقاطع المستوى ل م ه مع المستوى ء ب ع وليكن الخط ء هـ هو خط التقاطع المطلوب ومسقطه الرأسى ءَ هـَ

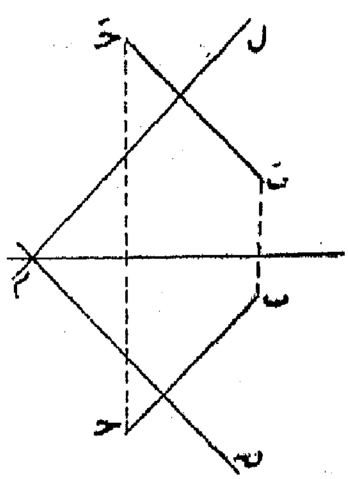


شكل ( ١٧٥ )

فنقطة تقاطع ا ب ، حـ ء هى نقطة تلاقى المستقيم ا ب مع المستوى ل م ه وهى النقطة و ومسقطها الرأسى وَ والافقى و وهو المطلوب

البرهان : — حيث أن النقطة و هى نقطة تقاطع الخطين حـ ء ، ا ب فهى اذا موجودة على كليهما أى موجودة على ا ب وحيث انها موجودة أيضا على حـ ء فهى موجودة فى المستوى المحتوى على حـ ء وهو ل م ه وهو المطلوب

مسألة ٣٥ — طريقة رسم مسقطى خط مستقيم عمود على مستو معلوم من نقطة خارجة عنه



شكل (١٧٦)

المفروض — المستوى ل م ه والنقطة ب ومسقطاها بَ ، ب شكل ١٧٦

والمطلوب رسم خط مستقيم يمر بالنقطة ب وعمود على المستوى ل م ه

العمل — كل خط عمودى على

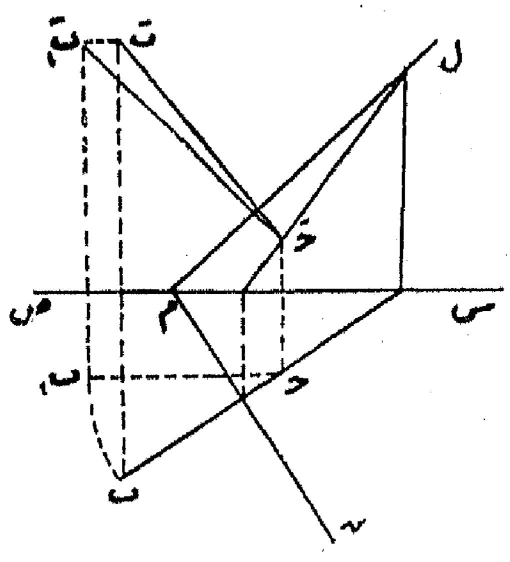
مستو يكون مسقطاه عموديين على أثرى ذلك المستوى بمعنى أن يكون مسقطه الافقى عمود على الأثر الافقي للمستوى ومسقطه الرأسى عمود على الأثر الرأسى للمستوى فاذا رسم من ب المسقط الأفقى للنقطة ب الخط ب حـ عمودا على م ن الأثر الافقى للمستوى ل م ن ومن النقطة بَ المسقط الرأسى للنقطة ب الخط بَ حـَ عمودا على ل م الاثر الرأسى للمستوى ل م ن يكون بَ حـَ و ب حـ هما مسقطا الخط ب حـ المطلوب

**مسألة ٣٦ — تعيين المسافة بين مستو معلوم ونقطة خارجة عنه**

**المفروض** — المستوى ل م ن والنقطة ب خارجة عنه ( شكل ١٧٧ )

والمطلوب تعيين المسافة بين النقطة ب والمستوى ل م ن

**العمل** — نسقط العمود من النقطة ب على المستوى ل م ن بالطريقة السابقة وليكن بَ حـَ و ب حـ هو العمود من ب على المستوى ل م ن ثم نأت بنقطة تقابل هذا العمود مع المستوى ل م ن كما تقدم شرحه ولتكن النقطة حـَ و حـ ثم نعين الطول الحقيقي للمستقيم ب حـ باحدى الطرق السابقة أيضاً فيكون الطول الحقيقي هذا هو المسافة بين النقطة ب والمستوى ل م ن لانه طول العمود منها على المستوى وشكل ( ١٧٧ ) يبين ايجاد الطول الحقيقي بعد ايجاد نقطة التقاطع وهو الطول بَ١ حـَ وهو المطلوب



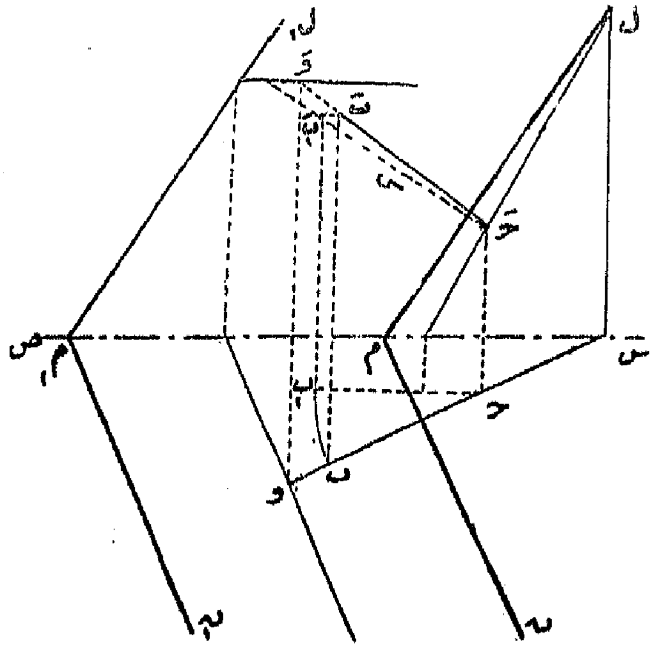

شكل ( ١٧٧ )

**مسألة ٣٧ - المطلوب رسم مستو يوازى مستو معلوم ويبعد عنه ببعد معلوم**

سبق أن شرحنا هذه العمليه فى الباب السابق ولها حل آخر نلخصه فيما يلى

**المفروض** — المستوى ل م ن ( شكل ١٧٨ )

والمطلوب رسم مستو مثل ل١م١ن١ يبعد بالبعد س عن المستوى ل م ن



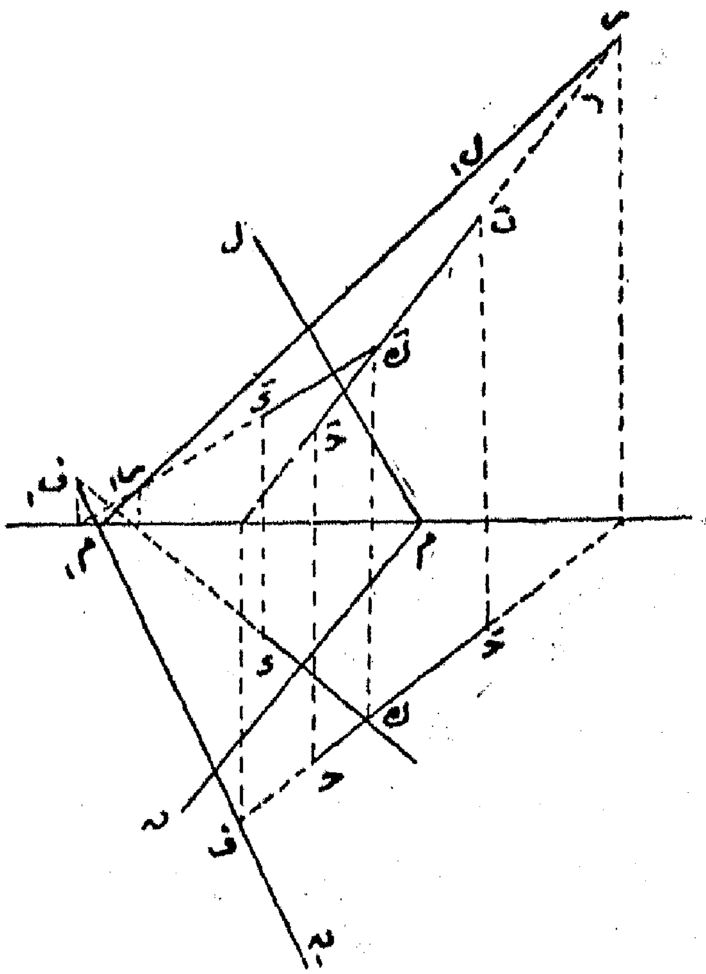

شكل (١٧٨)

**العمل** : — نرسم من أى نقطة مثل حـ على المستوى ل م ن وهذه طبعا يمكن ايجادها برسم أى خط أفقى فى المستوى ل م ن واختيار نقطة عليه مثل حـَ ثم من حـ نقيم العمود حـ ب على المستوى ثم نأخذ على حـ ب ابتداء من حـ بعد حقيقى يساوى المسافة س وذلك بدوران العمود الى أن يوازى احد مستويى المسقط وأخذ البعد س على مسقطه الجديد بعد الدوران ثم ارجاعه ثانيا . ولتكن وَ و هى نهاية الطول الحقيقي المطلوب ومن و نرسم خطا أفقيا ويوازى المستوى ل م ن بالطريقة التى سبق شرحها ثم نعين أثر هذا الخط وبمعلومية هذا الاثر نرسم أثرى المستوى الجديد موازيين لأثرى ل م ن وليكن ل١م١ن١ هو المستوى المطلوب

**البرهان** — بما أن نقطة حـ فى المستوى ل م ن و و فى المستوى ل١م١ن١ وبما أن كليهما على خط مستقيم واحد عمودى على المستوى ل م ن وبما أن المستوى ل١م١ن١ مستوى يوازى المستوى ل م ن لان أثرى كل منهما متوازيين النظير لنظيره فيكون الخط و حـ أيضا عمود على المستوى ل١م١ن١ وبما أن طول الخط و حـ هو الطول المطلوب فلا بد أن المستويين ل م ن و ل١م١ن١ يبعدان بالبعد المطلوب عن بعضهما وهو المطلوب

مسألة ٣٨ المطلوب رسم مستو يحتوى على خط معلوم ويكون عموديا على مستقيم معلوم أيضا

المفروض — المستوى ل م ن والخط ب ح خارج عنه والمطلوب رسم مستو مثل ل١ م١ ن١ يحتوى على ب ح وعمود على المستوى ل م ن شكل ١٧٩



شكل ( ١٧٩ )

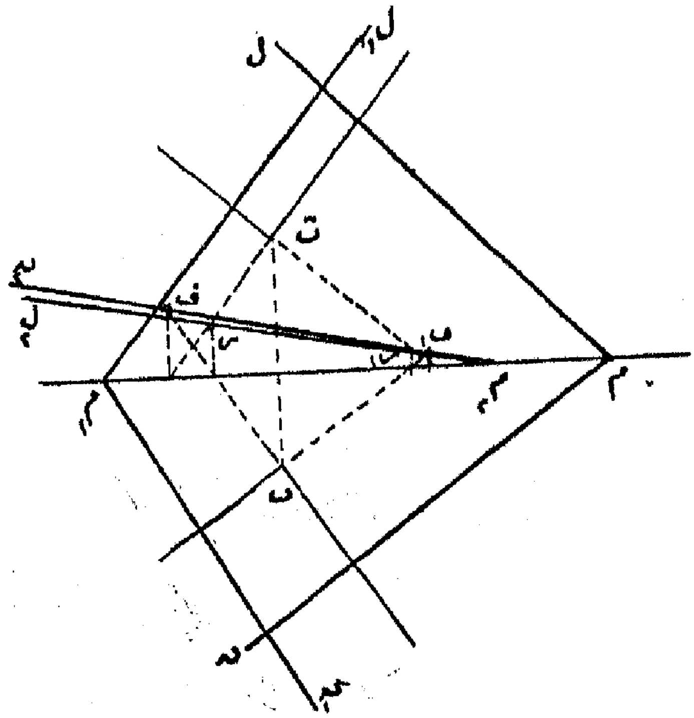
العمل — ننتخب نقطة أيا كانت على المستقيم ب ح مثل ك وليكن مسقطاها كَ كْ . ثم من ك ننزل عموداً على المستوى ل م ن وليكن ك ى ثم نعين المستوى الذى يحتوى على المستقيم ب ح و ك ى بتعيين أثرى كل منهما وليكن أثرا ب ح هما ف و س وأثرا ك ى هما ف١ و س١ وبتوصيل الأثرين الرأسيين ببعضهما والافقيين ببعضهما ينتج ل١ م١ ن١ وهو المستوى المطلوب

البرهان — نعلم أن كل مستوى يحتوى على خط عمودى على مستوى آخر يكون عموديا على هذا المستوى فبما أن المستوى ل١ م١ ن١ رسم محتويا على ك ى و ك ى عمود على المستوى ل م ن فالمستوى ل١ م١ ن١ اذاً عمود على ل م ن وهو المطلوب

**مسألة ٣٩ المطلوب رسم مستو عمودى على مستويين معلومين ويمر بنقطة معلومة**

**المفروض** — المستويين ل م ن و ل١ م١ ن١ والنقطة ب خارجة عنهما والمطلوب رسم مستو مثل ل٢ م٢ ن٢ يمر بالنقطة ب وعمود على المستويين ل م ن و ل١ م١ ن١ ب شكل ١٨٠

**العمل** — نرسم من النقطة ب عمودا على كل من المستويين ل م ن و ل١ م١ ن١ بالطريقة المعروفة ثم نعين المستوى الذى يحتوى على هذين العمودين بعد إيجاد أثرى



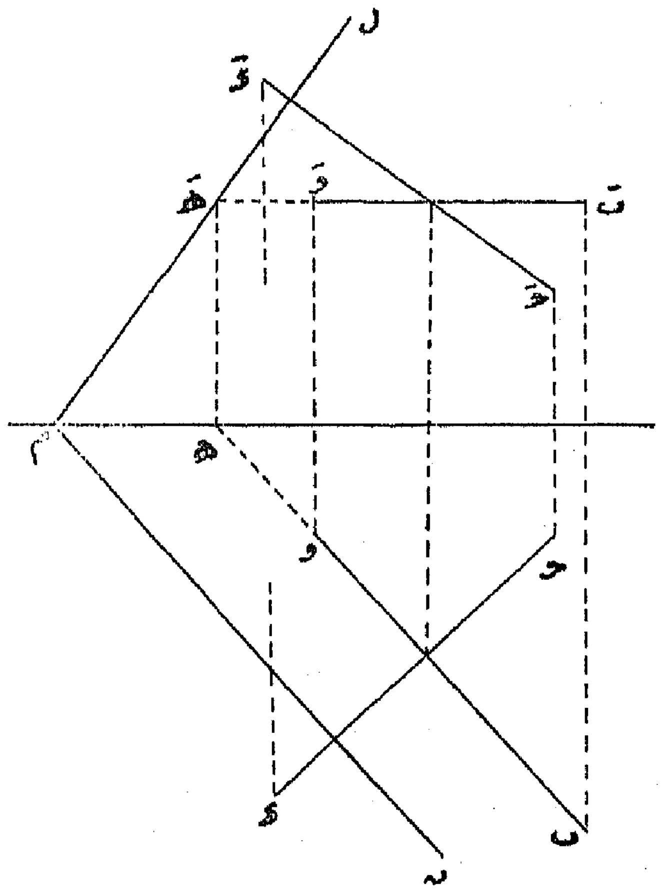
شكل ( ١٨٠ )

كل منهما فيكون هذا المستوى وهو ل٢ م٢ ن٢ هو المستوى المطلوب

**البرهان** — المستوى ل٢ م٢ ن٢ عمود على كل من المستويين ل م ن و ل١ م١ ن١

لانه يحتوى على خطين أحدهما عمود على المستوى ل م ه والآخر عمود على المستوى ل١م١ه١ نظرية ٥ صفحة ٨ وهو المطلوب

**مسألة ٤٠ المطلوب تعين أثرى المستوى الذى يحتوى على نقطة معلومة وعمود على خط معلوم**




شكل (١٨١)

**المفروض** : ب بَ مسقطا النقطة ب و حَ ءَ و حـ ء مسقطا الخط المستقيم شكل ١٨١

**والمطلوب** : تعيين أثرى المستوى الذى يحتوى على النقطة ب بَ وعمود على المستقيم حَ ءَ — حـ ء

**العمل** : علمنا مماسبق أنه لابد وأن يكون أثرا المستوى المطلوب متعامدين على مسقطى الخط حـ ء فيتبقى الآن تعيين نقطة على احدى أثرى المستوى المذكور فيتعين ذلك المستوى

من النقطة ب وهى المسقط الأفقى للنقطة ب نرسم ب و خطا عموديا على هـ ى المسقط الافقى للخط حـ ى فيكون ب و موازيا للأثر الافقى المستوى المطلوب ويمكننا أن نقول أيضا أنه المسقط الافقى لخط أفقى فى المستوى المذكور فاذا رسمنا خط بَ وَ موازى لخط لارض لكان هـذا هو المسقط الرأسى للخط الافقى المذكور فاذا أتينا بأثر هذا الخط بان نمد ب و الى أن يلاقى خط الارض فى ﻫ ومن ﻫ نقيم العمود ﻫ ﻫَ على خط الارض ليلاقى امتداد بَ وَ فى ﻫَ لكانت نقطة ﻫَ هى الاثر الرأسى المستقيم ب و وموجودة على الاثر الرأسى للمستوى المطلوب .

فاذا رسمنا من ﻫَ خطا عموديا على حَـ ىَ المسقط الرأسى للخط حـ ى مثل ﻫَ م ومددناه الى أن يلاقى خط الأرض فى م لكان ﻫَ م هو الاثر الرأسى للمستوى واثره الافقى هو الخط العمودى من م على هـ ى المسقط الافقى للخط حـ ى وليكن م ن وهو المطلوب

البرهان — بما أن ﻫَ م ، م ن أثرين عمودين على مسقطى الخط حـ ى على التوالى فيكونا أثرى مستو عمود على حـ ى

وبما أن الخط ب و هو خط أفقى فى ذلك المستوى ويحتوى على ب فيكون المستوى ﻫَ م ن يحتوى على ب أيضا وهو المطلوب

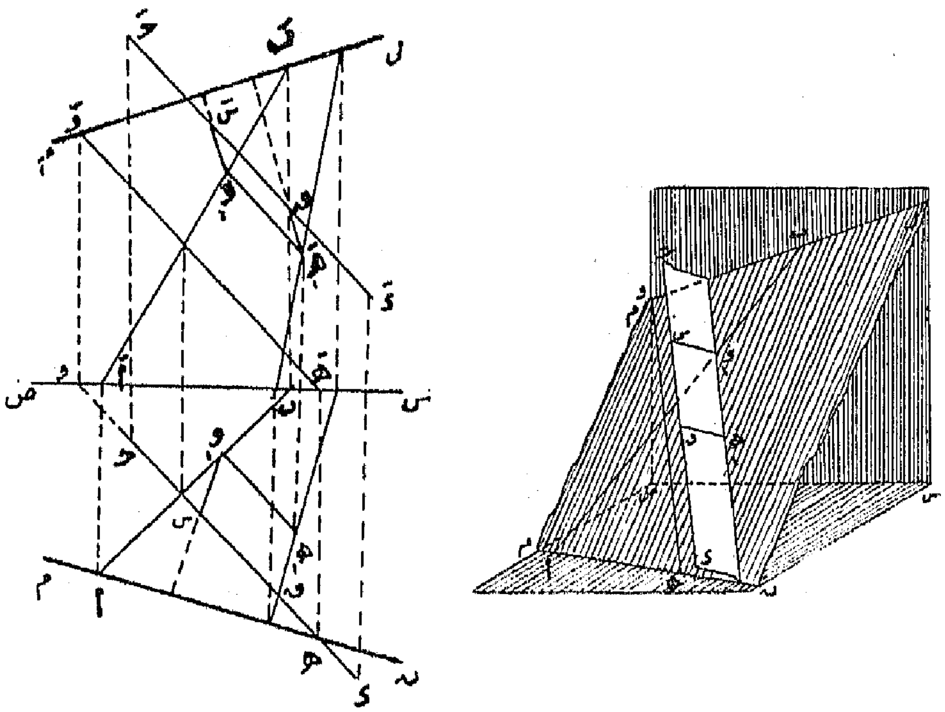
**مسألة ٤١ المطلوب تعيين العمود المشترك على خطين مستقيمين ليسا فى مستو واحد**

**المفروض** : — أن اَ بَ ، ا ب مسقطا الخط ا ب وأن حَـ ىَ ، حـ ى مسقطا الخط حـ ى اللذين ليسا فى مستو واحد شكل ١٨٢

**والمطلوب** تعيين العمود المشترك على كل من ا ب ، حـ ى

**العمل** : — نعين أثرى المستوى لم ـ م ن الذى يحتوى على ا ب ويوازى حـ ى مسألة ( ٣١ ) صفحة ١٠٦ ونعين أيضا أثرى المستوى الذى يحتوى على حـ ى وعموديا على المستوى ل م ـ م ن بان نرسم من أى نقطتين مثل س ، ن على حـ ى

عمودين مثل هـ ن و و س على المستوى ل م - م ن ونعين مستويهما وليكن المستوى



شكل ( ١٨٢ )

ل١ م١ ن١ الغير مهشر ثم نعين خط تقاطع المستويين ل م - م ن و ل١ م١ ن١ الجديد وليكن هـَ١ وَ١ و هـ١ و١ مسقطا خط التقاطع هـ١ و١

ومن نقطة تلاقى هـ١ و١ مع الخط ا ب ولتكن و١ نرسم عمودا على المستوى ل م - م ن مثل وَ١ سَ و و١ س فيكون المستقيم و١ س هو العمود المشترك المطلوب

البرهان — أولا العمود و١ س عمود على المستوى ل م - م ن الذى يحتوى على ا ب فيكون عمود على الخط ا ب ويكون أيضا عمود على هـ١ و١ وهو خط التقاطع وعليه يكون واقع فى المستوى ل١ م١ ن١

ولكن هـ١ و١ يوازى حـ ى لانه موجود فى مستوى ل م - م ن الذى يوازى حـ ى

∴ و١ س عمود على كل من حـ ى و ا ب

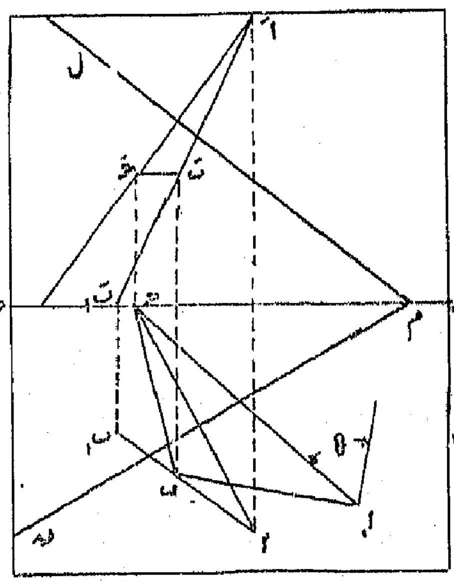
وشكل ( ١٨٢ ) الغير منظور يبين طريقة العمل

## مسألة ٤٢ تعيين ميل مستقيم معلوم على مستو معلوم

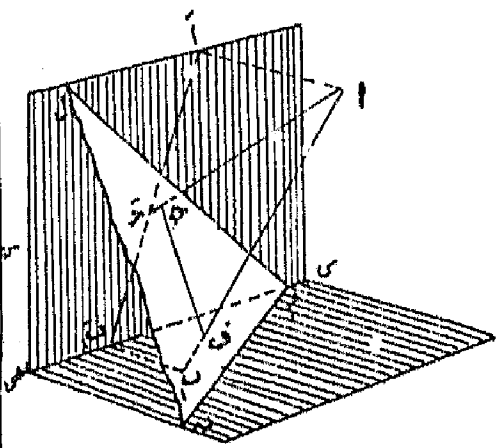
المفروض — آ َت، ى ا ب، مسقطا المستقيم ا ب، وأن ل م ى م ه أثرا المستوى ل م ه

والمطلوب : تعيين زاوية ميل المستقيم ا ب، على المستوى ل م ه شكلى ١٨٣ ى ١٨٤

العمل من أى نقطة مثل ا على المستقيم ا ب ننزل العمود ا حـ على المستوى ل م ه



١٨٤



١٨٣

مسألة ٣٥ ثم نعين الزاوية المحصورة بين ا ب ى ا حـ ولتكن زاوية ب ا حـ فتكون الزاوية المتممة لها θ هي الزاوية المطلوبة

البرهان — لتكن نقطتا ف ى هـ هما نقطتا تقاطع كل من ا ب ى ا حـ مع المستوى ل م ه على التناظر شكل ١٨٣ فيكون ف هـ هو مسقط المستقيم ا ب على المستوى ل م ه وعليه تكون الزاوية ا ف هـ هى الزاوية المطلوبة ( تعريف ١٨)

ولكن ا هـ ف زاوية قائمة

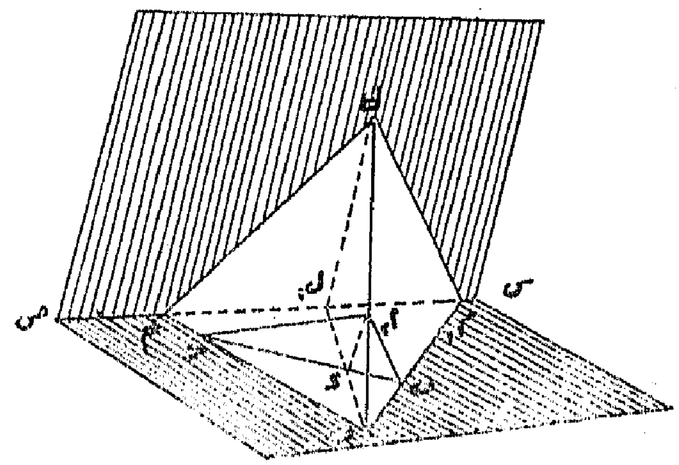
∴ ا ف هـ = ٩٠ ـ ف ا هـ = ٩٠ ـ ب ا حـ وهو المطلوب وشكل ١٨٤ يبين مسقط المثلث المتكون من المستقيم ا ب ى ا حـ وايجاد الشكل الحقيقى له وهو ا ب حـ والزاوية θ المتممة للزاوية ب ا حـ هي الزاوية المطلوبة

مسألة ٤٣ تعيين الزاوية الزوجية بين مستويين متقاطعين

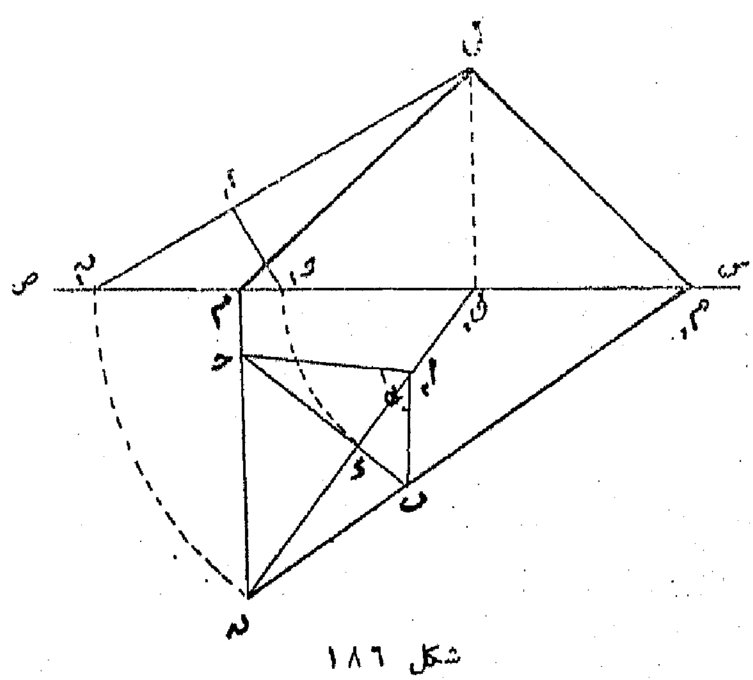
المفروض — المستويين المتقاطعين ل م١ ن ١ و ل م ن شكلى ١٨٥ و ١٨٦

والمطلوب : ايجاد الزاوية الزوجية بينهما

العمل : — نرسم ل١ ن وهو المسقط الافقى لخط التقاطع ل ن ثم من أى نقطة




شكل ١٨٥




شكل ١٨٦

مثل ب على م١ ن نرسم الخط ب ى حـ عموديا على ل١ ن ويقطعه فى ى ويقابل م ن فى حـ ثم نرسم العمودى من ى على الخط ل ن فى الفراغ وذلك بدوران المثلث ل ل١ ن حتى ينطبق على المستوى الرأسى فتنتقل ن الى ن١ و ى الى ى١ فنقيم من ى١ عمودا على ل ن١

وليكن ء، ا، شكل ١٨٦ ثم نأخذ الطول ء، ا، على الخط ء ل، وليكن ء ا٢ ونصل ب ا٢ ﻭ حـ ا٢ تكون الزاوية ب ا٢ حـ هى الزاوية المطلوبة

**البرهان** — المستوى ل ل، ﻫ عمودى على الافقى ويقطعه فى ل، ﻫ فبما أن ب ء عمود على ل ﻫ فيكون عمودا على المستوى ل ل، ﻫ (نتيجة نظرية ٥) ويكون عمودا على الخط ل ﻫ الواقع فى المستوى ولكن ء ا٢ عمود على ل ﻫ أيضا فيكون ل ﻫ عمودا على كل من ب ء ﻭ ء ا٢ أى عمودا على مستويهما ب ا٢ حـ وتكون الزاوية ب ا٢ حـ هى الزاوية الزوجية المطلوبة شكل ١٨٥

ولكن المثلث ب ا٢ حـ شكل ١٨٦ مرسوم مساو المثلث ب ا٢ حـ شكل ١٨٥

∴ الزاوية ب ا٢ حـ هى الزاوية بين المستويين وهو المطلوب

**مسألة ٤٤ تعيين أثرى مستو يميل بزاوية معلومة على مستو معلوم ويحتوى على خط معلوم فى ذلك المستوى**

**المفروض** — المستوى ل م، ﻫ وان ل، ﻫ هو المسقط الافقى للخط المفروض شكل ١٨٦

**والمطلوب** رسم مستو يحتوى على ل، ﻫ ويميل بزاوية ٪ مع المستوى ل م، ﻫ

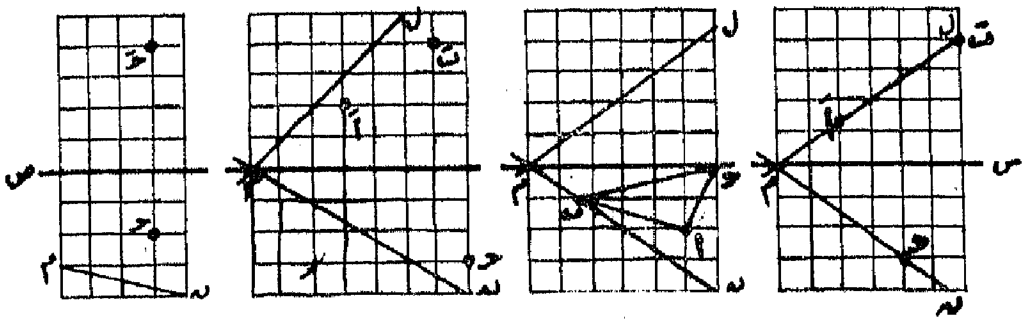
**العمل** : — نرسم من اى نقطة ب على ل، ﻫ الاثر الافقى للمستوى الخط ب حـ عمودا على ل، ﻫ ليقابله فى ء ثم بنصف قطر يساوى ل، ء ونركز فى ل، ونرسم قوسا ل، ء، يقطع خط الارض فى ء، وبنصف قطر يساوى ل، ﻫ نرسم قوسا مركزه ل، أيضا يقطع خط الأرض فى ﻫ، ثم نرسم من ء، عمودا ء، ا، على ل ﻫ، يقطعه فى ا، ثم نأخذ البعد ء ا٢ على الخط ء ل، يساوى ء، ا، ثم نصل ا٢ ب ونرسم ا٢ حـ يميل بالزاوية ٪ مع الخط ا٢ ب فيقابل الخط ب حـ فى نقطة حـ ثم نصل ﻫ حـ ونمده ليقابل خط الارض فى م ثم نصل ل م فيكون ل م ﻫ هو المستوى المطلوب

**البرهان** — اذا فهم الطالب حل المسألة السابقة فلا يجد صعوبة فى فهم هذه العملية لأنها عكس العملية السابقة تماما ورسمها يحقق تلك العملية ويلاحظ أيضا ل، ﻫ هو المسقط الافقى لخط تقاطع المستويين فيكون واقعا فى كل منهما كما هو مطلوب

# تمرينات (٦)

## على الخط المستقيم والمستوى

(١) معلوم أثرا المستوى ل م ٮه شكل ١٨٧ ومعلوم أيضا مسقط واحد لكل من النقط الثلاث ا ى ب ى حـ المحتوى عليها ذلك المستوى والمطلوب ايجاد الشكل الحقيقى للمثلث ا ب حـ



شكل ١٩٠ شكل ١٨٩ شكل ١٨٨ شكل ١٨٧

(٢) معلوم أثرا لم ٮه شكل ١٨٨ ومعلوم المسقط الافقى لمثلث ا ب حـ موجود فى ذلك المستوى والمطلوب ايجاد المسقط الرأسى لهذا المثلث

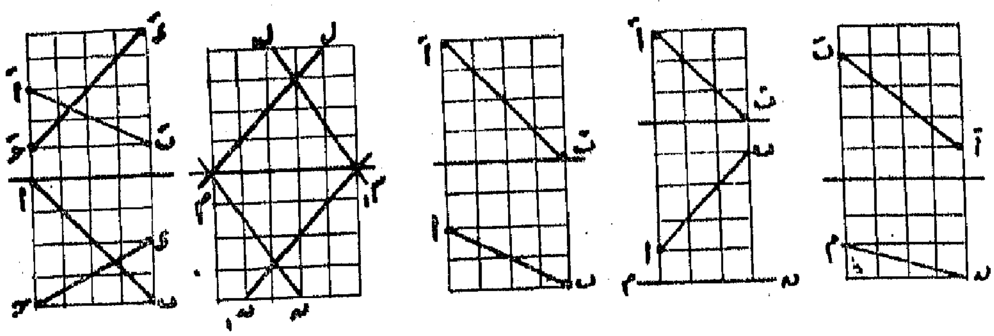
(٣) معلوم أثرا المستوى ل م ٮه الشكل السابق ١٨٨ والمطلوب تعيين مسقطى نقطة عليه وتبعد بمقدار ٣ سم عن كل من مستوى المسقط ثم المطلوب بعد ذلك رسم خط مستقيم أفقى فى ذلك المستوى يمر بالنقطة المذكورة

(٤) معلوم أثرا المستوى ل م ٮه شكل ١٨٩ وأن آ ى بَ هما المسقطان الرأسيان لنقطتين منه وأن حـ هى المسقط الافقى لنقطة ثالثة عليه أيضا وليست على استقامة النقطتين ا ى ب والمطلوب ايجاد المسقط الرأسى والافقى للمثلث المتكون من الثلاث نقط وايجاد شكله الحقيقى

(٥) معلوم الاثر الافقى م ٮه لمستو شكل ١٩٠ ومسقطا نقطة على هذا المستوى مثل حـَ حـ والمطلوب رسم الاثر الرأسى لذلك المستوى وايجاد مسقطى نقطة أخرى مثل ء عليه أيضا تبعد عن النقطة حـ بمقدار ٣٫٥ سم ( بفرض أن الأثر الافقى هذا لايمكن تقابله مع خط الارض فى حدود ورقة الرسم )

(٦) معلوم الاثر الافقى م ٮه لمستو شكل ١٩١ والمسقط الرأسى آ بَ المستقيم

ا ب واقع فى ذلك المستوى والمطلوب رسم المسقط الافقى للمستقيم ا ب اذا كان طوله الحقيقى ٧ سم ( بفرض أن الاثر الافقى هذا لا يمكن تقابله مع خط الارض فى حدود ورقة الرسم )



شكل ١٩١ ١٩٢ ١٩٣ ١٩٤ ١٩٥

( ٧ ) اَ بَ ، ا ب هما المسقطان الرأسى والافقى للخط المستقيم ا ب على التوالى ومعلوم الاثر الافقى م ن لمستو ما شكل ١٩٢ فاذا كان الخط ا ب يقابل ذلك المستوى فى نقطة تبعد عن النقطة ب بمقدار ٣٫٧٥ سم فالمطلوب تعيين الأثر الرأسى لهذا المستوي

( ٨ ) المطلوب تعيين أثرى كل من المستويين المتقاطعين المحتويين علي الخط ا ب المرسوم مسقطاه فى شكل ١٩٣ اذا كان ميل كل من هذين المستويين على المستوى الافقى هو ٦٠° ( بفرض أنه لا يمكن امتداد المسقطين المذكورين يمينا أو شمالا )

( ٩ ) الاثر الافقى لمستوى عمودى يميل مع خط الأرض بزاوية قدرها ٤٥° والمطلوب رسم المسقطين الرأسيين لخطين واقعين فى ذلك المستوى ويميل أحدهما بزاوية ٣٠° مع المستوى الرأسى ويميل الآخر بزاوية ٦٠° مع المستوى الافقى وأن الخط الأول يقابل خط الارض وأن الثانى يقطع الأول فى نقطة تبعد عن المستوى الرأسى بمقدار ٣٫٧٥ سم

(١٠) يميل كل من الاثر الرأسى والافقى لمستو بزاوية ٦٠° ، ٤٥° مع خط الارض علي التوالى والمطلوب رسم مسقطى خط مستقيم واقع فى ذلك المستوى ويميل ٣٠° مع المستوى الافقى ويمر بنقطة تبعد بمقدار ٢٫٥ سم عن كل من مستويي المسقط

(١١) المعلوم أثرا مستوى شكل ١٨٩ والمطلوب رسم مستقيم واقع فى ذلك المستوى ويميل بزاوية ٣٠° مع المستوى الافقى بشرط أن يكون طول الجزء الواقع منه بين أثرى ذلك المستوى هو ٧ سم

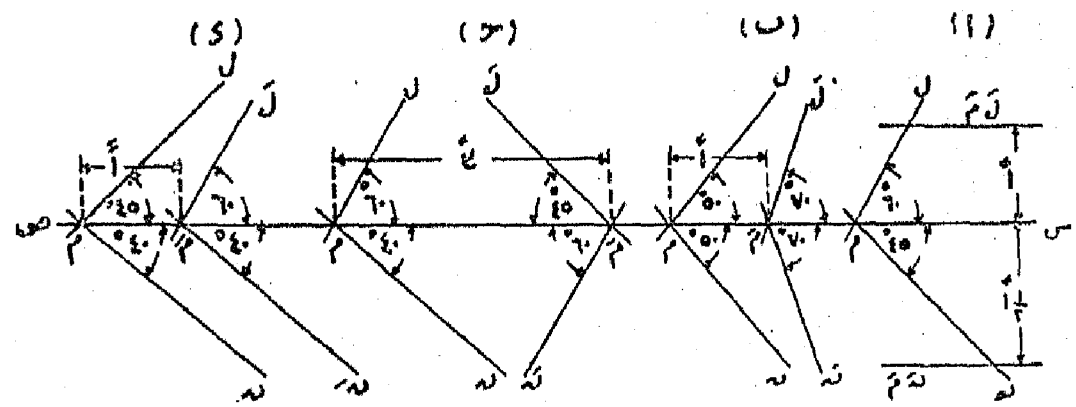
(١٢) المعلوم أثرا المستوى ل م ن شكل ١٩٤ والمطلوب رسم مسقطى خط مستقيم واقع فى ذلك المستوى ويوازى المستوى ل١م١ ن١ ويبعد عنه بمقدار ١ سم

(١٣) المطلوب رسم مسقطى الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة آ فى الشكل ١٩٤ ويوازى كل من المستويين ل م ن و ل١م١ن١ ( النقطة ا هى ٢ و ٣ وعلى خط عمودى على خط الارض من م )

(١٤) يميل كل من الاثر الرأسى والافقى لمستوى بزاوية ٦٠° و ٤٥° مع خط الارض على التوالى والمطلوب رسم مسقطى الخط المستقيم العمودى على هذا المستوى ويقابله فى نقطة مثل ا ويقابل خط الارض فى نقطة ب بحيث يكون طول الخط ا ب هو ٣ سم

(١٥) اَ بَ و ا ب و حَ ءَ و حـ ء هى مساقط خطين مستقيمين ا ب و حـ ء ليسا متقاطعين شكل ١٩٥ والمطلوب تعيين أثرى المستوى الذى يحتوى على حـ ء ويوازى ا ب ثم أوجد أيضا مسقطى الخط ا ب على هذا المستوى

(١٦) المطلوب رسم أثرى المستوى العمودى على المستقيم ا ب وينصفه شكل ١٩٢



شكل ١٩٦

(١٧) المطلوب رسم أثرى المستوى الذى يحتوى على النقطة آ١ شكل ١٩٤ وعمودى على كل من المستويين المعلومين (النقطة) ا هى ٢ ، ٣ وعلى خط عمودى على خط الارض من م)

(١٨) الزاوية بين خطين مستقيمين متقاطعين هى ٦٠° ويميل أحدهما بزاوية ٣٥° ويميل الآخر بزاوية ٤٥° مع المستوى الافقى والمطلوب تعيين ميل المستوى المحتوى عليهما على كل من مستويى المسقط

(١٩) المطلوب ايجاد الزاوية المحصورة بين المستويين فى الاشكال ا ، ب ، حـ ، ى شكل ١٩٦

(٢٠) المطلوب رسم اثرى مستو يميل بزاوية ٣٠° مع المستوى ل م ه شكل ١٨٨

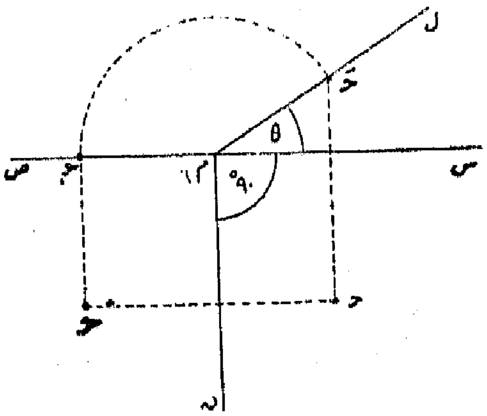
# الفصل الثامن

## ٢٩ — دوران المستويات حول أحد أثريها وانطباقها على أحد مستويي المسقط

المعلوم ميل أى مستو على كل من مستويي المسقط والمطلوب تعيين أثرى هذا المستوى ودورانه حول أحد أثريه الى أن ينطبق على أحد مستويي المسقط

### أولا — دوران مستوى عمودى على أحد مستويي المسقط

(١) — المفروض : مستوى يميل على المستوى الافقى بزاوية $\theta$ وعمودى على المستوى الرأسى شكل ١٩٧



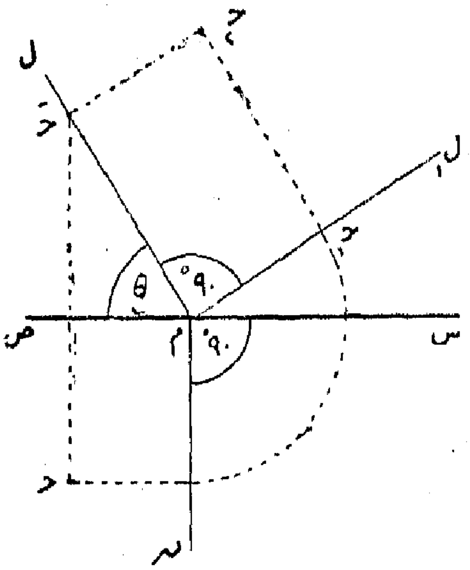

شكل ١٩٧

والمطلوب رسم أثرى هذا المستوى ودورانه الى أن ينطبق على المستوى الافقى

العمل — معلوم أن الاثر الرأسى لهذا المستوى يميل بالزاوية $\theta$ مع خط الأرض وأن الاثر الأفقى لهذا المستوى عمود على المستوى الرأسى فهو عمود على كل خط فيه ولذا فهو عمود على الاثر الرأسى لنفس المستوى شكل ١٩٧ أى أن الزاوية الحقيقية بين أثرى ميل هذا المستوى هى زاوية قائمة وتظل تلك الزاوية قائمة قبل الدوران وبعده . فلا بد اذاً أن ينطبق الاثر الرأسى لهذا المستوى على خط الأرض بعد الدوران . واذا انتخبنا أى نقطة على الاثر الرأسى مثل حَـ . فان المسافة من تلك النقطة الى نقطة تلاقى الاثرين تظل ثابتة أثناء الدوران الى أن ينطبق المستوى على المستوى الافقى والآن اذا ركزنا فى نقطة تلاقى الاثرين م وببعد يساوى م حَـ ورسمنا قوسا الى

أن يقطع خط الارض فى حـ١ لكان القوس حَـ حـ١ هو المحل الهندسى لهذه النقطة أثناء الدوران وفى النهاية تقع تلك النقطة على خط الارض عند حـ١

(ب) — المفروض : المستوى السابق والمطلوب دورانه حول أثره الرأسى الى أن ينطبق على المستوى الرأسى شكل (١٩٨)


شكل (١٩٨)

العمل — علمنا أن الاثرين متعامدين قبل الانطباق وبعده فاذا ثبتنا الاثر الرأسى ورسمنا من نقطة تلاقى الاثرين عمودا على الاثر الرأسى لكان هذا هو الاثر الافقى لذلك المستوى بعد الانطباق

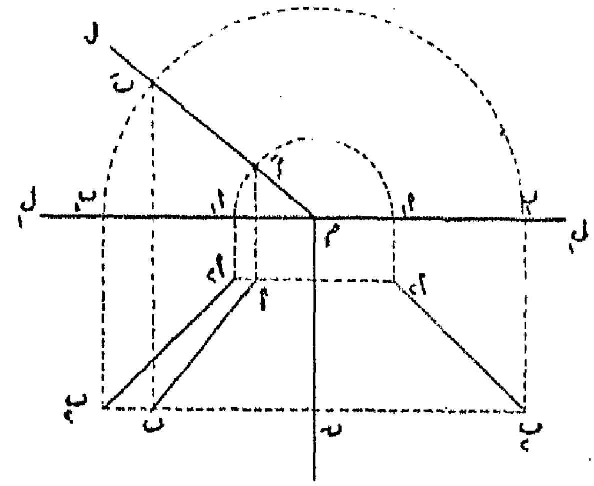
**مسألة ٤٥ — المعلوم أثرا مستوى عمودى على أحد مستويى المسقط ونقطة واقعة على المستوى والمطلوب تعيين وضع تلك النقطة على المستوى بعد انطباقه على أحد مستويى المسقط**

**المفروض** — المستوى ل م ن الذى يميل بالزاوية θ على الافقى وعمودى على الرأسى وأن حَـ حـ مسقطا نقطة حـ الواقعة فى ذلك المستوى شكلى ١٩٧ و ١٩٨

**والمطلوب** — تعيين وضع النقطة حـ على المستوى بعد انطباقه على كل من مستويى المسقط

**العمل** : ا — فى حالة دوران المستوى حول اثره الافقى وانطباقه على المستوى الافقى تكون النقطة حـ حافظة لبعدها عن المستوى الرأسى أو بمعنى آخر يكون المحل الهندسى لمسقطها الافقى حـ هو خط مستقيم مواز لخط الارض وبعد انطباق المستوى على المستوى الافقى يقع المسقط الرأسى حَـ على خط الارض كما ذكر ويكون اذاً مسقطها الافقى على خط مستقيم مواز لخط الارض من النقطة حـ وفى الوقت نفسه تكون على خط عمودى على خط الارض من حَـ فتأخذ الوضع حـ وهو المطلوب

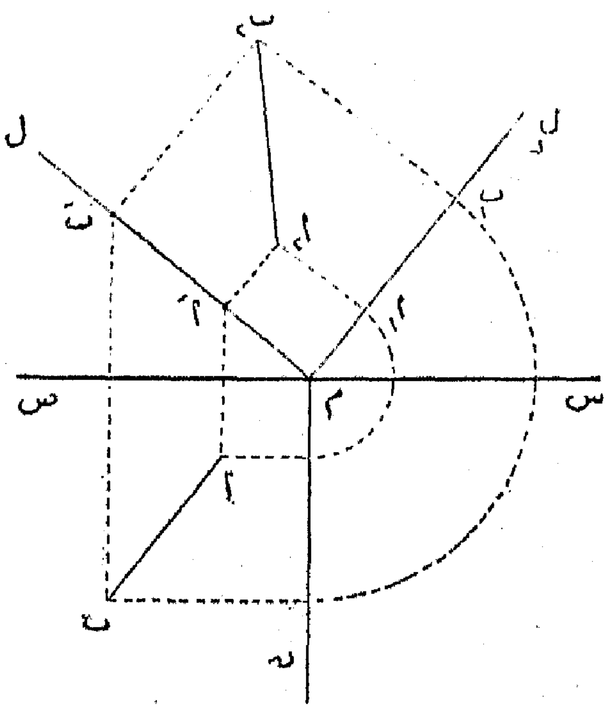
(ب) وفى حالة دوران المستوي حول الاثر الرأسى وانطباقه على المستوى الرأسى يكون بعد النقطة عن المستوى الرأسى هو بعد مسقطها الافقى حـ عن خط الارض وهذا البعد هو عبارة عن بعدها فى الفراغ عن الاثر الرأسى للمستوى ويظل هذا البعد ثابتا أثناء دوران المستوى حتى ينطبق على المستوى الرأسى . فاذا اقمنا من حـَ عمودا على الاثر الرأسى ومن حـ١ عمودا على الاثر الافقى ل١م بعد الانطباق بحيث يكون حـ١ م مساويا لبعد النقطة حـ عن خط الارض فان نقطة تلاقى العمودين حـ٢ هى الوضع المطلوب للنقطة حـ بعد انطباق مستويها على المستوى الرأسى وهو المطلوب



( شكل ١٩٩ )

تنبيه :

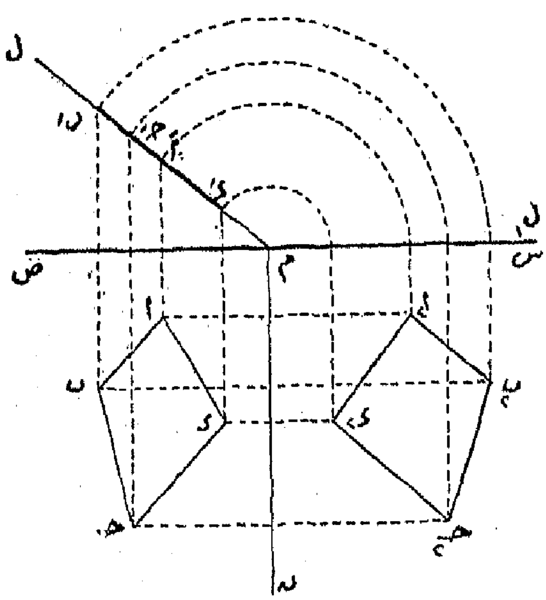
أولا — يمكن ايجاد وضع خط مستقيم مثل ا ب موجود فى مستو عمودى بعد انطباق ذلك المستوى على أحد مستويى المسقط بمعلومية مسقطيه اَ بَ ، ا ب وذلك بتعيين وضع نقطتين منه مثل ا ، ب كما فى مسألة ( ٤٥ ) فالخط الواصل بين وضعى هاتين النقطتين بعد الانطباق يكون هو الوضع المطلوب المستقيم المذكور ويكون فى هذه الحالة البعد بين وضعى النقطتين هو بعد حقيقى لان الخط نفسه قد انطبق مع مستويه على أحد مستويى المسقط . وشكل ١٩٩ يبين انطباق المستقيم على المستوى الافقى وشكل ٢٠٠ يبيّنه منطبقا على المستوى الرأسى وفيهما ا٢ ب٢ هو وضع



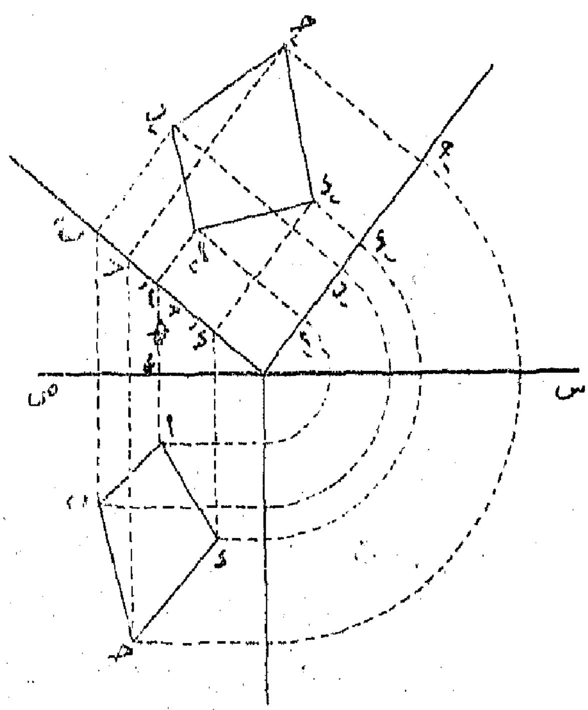
( شكل ٢٠٠ )

المستقيم ا ب بعد الانطباق وهو بعد حقيقي

ثانيا ـ يمكن ايجاد الشكل الحقيقي ووضع اى مضلع كان مثل المضلع ا ب حـ ء الموجود فى مستوى عمودى ومعلوم مسقطاه بعد انطباق مستويه هـذا على أحـد مستويى المسقط وذلك بايجاد موضع رؤوسه بعد انطباق المستوى على احـد مستويى المسقط كما سبق فى ايجاد وضع النقطة والخط المستقيم. فالمضلع المتكون من تلك الرؤوس وهى منطبقـة يكوّن وضـع المضلع المطلوب وهو الشكل الحقيقى لهـذا المضلع وفى شكل ٢٠١ $ا_٢ ب_٢ حـ_٢ ء_٢$ يبين وضع المضلع وشكله الحقيقى بعد انطابقه على المستوى الافقى وفى شكل ٢٠٢ المضلع $ا_٢ ب_٢ حـ_٢ ء_٢$ يبين وضعه وشكله الحقيقى وهو منطبقا على المستوى الرأسى



(شكل ٢٠١)

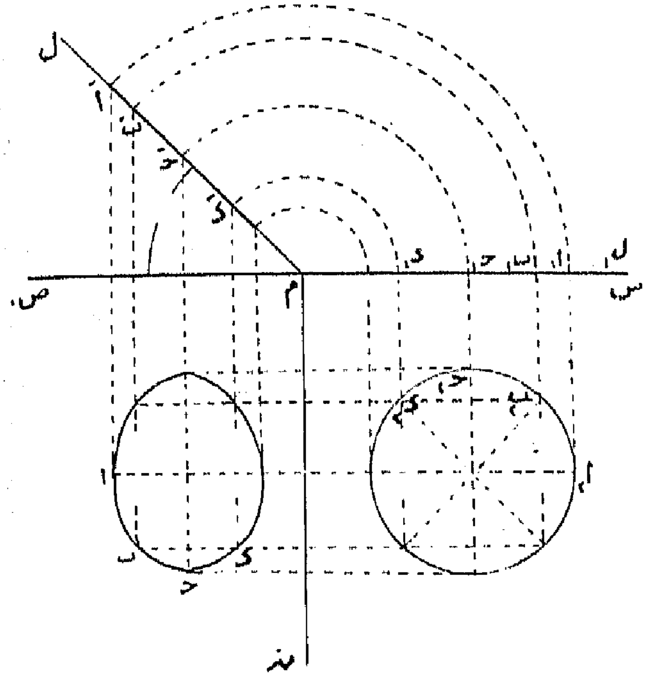


(شكل) ٢٠٢

ثالثا ـ يمكن ايجاد الشكل الحقيقى لدائرة او اى منحنى موجود فى مستوى عمودى معلوم بمعلومية مسقطيه وذلك بايجاد وضع عدة نقط على هذا المنحنى بعد انطباق مستوية على احد مستويى المسقط فالمنحنى المتكون من تلك النقط بعد الانطباق تكوّن الشكل الحقيقى للمنحنى المذكور وشكل ٢٠٣ يبين الشكل الحقيقى للدائره

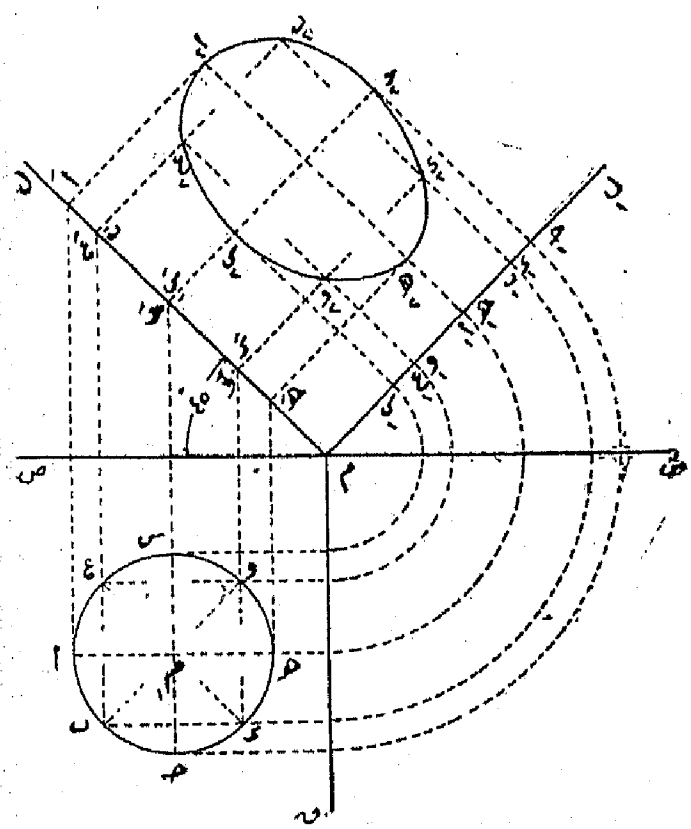
م بعد انطباقها على المستوى
الافقى وشكل ٢٠٤ يبين
الشكل الحقيقى لقطع ناقص
بعد انطباقه على المستوى الرأسى

ويستخلص من النتائج
المتقدمة ان طريقة الانطباق
يمكن بها تعيين الاشكال الحقيقية
للاسطح المستوية مهما كانت
اشكالها بمعلومية مسقطيها
والمستوى المحتوى عليها وذلك
امابدوران مستويها حول اثره
الافقى وانطباقه على المستوى
الافقى كما بالاشكال (١٩٩)
و ٢٠١ و ٢٠٣



شكل (٢٠٣)

واما بدورانه حول اثره
الرأسى وانطباقه على المستوى
الرأسى كما بالاشكال (٢٠٠)
و (٢٠٢) و (٢٠٤) ويمكن
الاستغناء فى الحالة الثانية عن
رسم الاثر الافقى له م بعد
الانطباق فمثلا فى الشكل ٢٠٢
يمكن الاكتفاء باخذ الابعاد
اَ ا٢ و بَ ب٢ و حَ ح٢ و ءَ ء٢
مساويه لابعاد المساقط الافقيه للنقط ا و ب و حـ و ء عن خط الارض على التوالى



شكل (٢٠٤)

**مسألة ٤٦ — المعلوم أثر أى مستو عمودى ومعلوم وضع نقطة منه بعد انطباقه على أحد مستويى المسقط والمطلوب تعيين مسقطى تلك النقطة قبل دوران ذلك المستوى وانطباقه**

**المفروض :** — المستوى ل له م المـائل بالزاوية ө مع المستوى الأفقى وعمودى على المستوى الرأسى وأن حـ١ هو موضع نقطة منه مثل حـ بعـد انطباقه على أحد مستويى المسقط وليكن المستوى الأفقى شكل ١٩٧

**والمطلوب :** — إيجاد مسقطى النقطة حـ قبل دوران المستوى

**العمل :** — نزل العمود من حـ١ على خط الارض ليقابله حـ١ وهى المسقط الرأسى للنقطة حـ بعـد الانطباق ثم نركز فى م وبنصف قطرم حـ١ ونرسم قوسا يقطع الأثر الرأسى المستوى ل م له فى حـَ تـكون هى المسقط الرأسى للنقطة حـ قبل الدوران ثم نرسم من حـ١ خطا موازيا لخط الارض ليقابل الخط النازل من حـَ عموداعلى خط الارض فى حـ تـكون حـ المسقط الافقى للنقطة المذكورة وهو المطلوب

ملاحظة : — هذه العملية هى عكس العملية فى المسألة ٤٥ ويمكن فهم تلك العملية فى حالة انطباق المستوى على المستوى الرأسى شكل (١٩٨)

**نتيجة :** —

أولا — يمكن إيجاد مسقطى أى مضلع كان مثل ا ب حـ ى موجود فى مستوى عمودى إذا علم وضع ذلك المضلع بعد انطباق مستويه على أحـد مستويى المسقط أو بمعنى آخر إذا علم شكله الحقيقى وهـذا عكس ماذكر فى النتيجة الثانية مسألة (٤٥) وشكلى (٢٠١) و(٢٠٢) يوضحان طريقة العمل

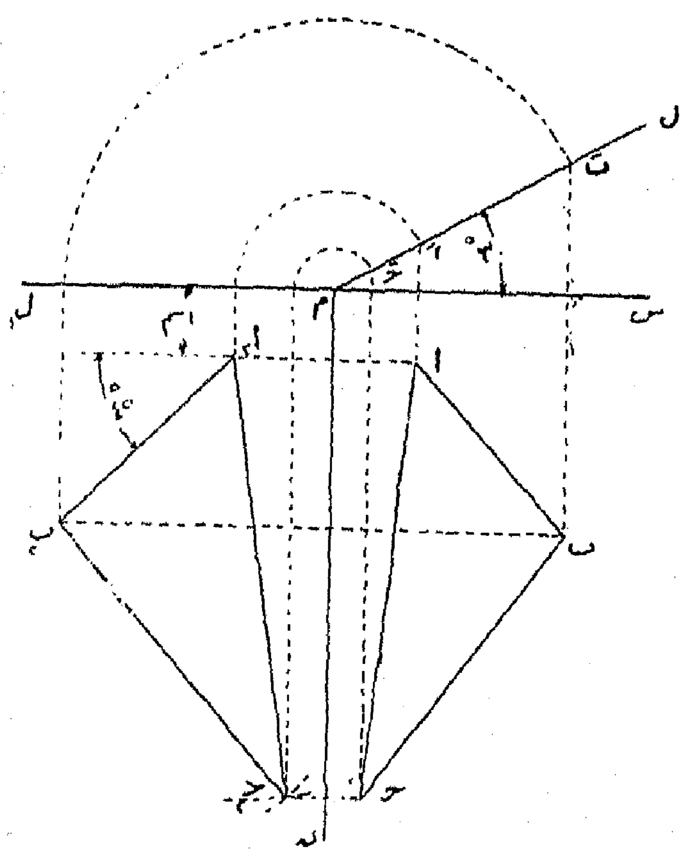
ثانيا — يمكن أيضا إيجادمسقطى أى دائرة أو أى منحنى معلوم وضعه وشكله الحقيقى قبل الانطباق بنفس الطريقة وهو عكس ماذكر فى النتيجة الثالثة من مسألة (٤٥) وشكلى (٢٠٣) و (٢٠٤) موضح بهما طريقة العمل

**مسألة ٤٧ — المعلوم المثلث ا ب حـ الذى يميل بالزاوية ө مع المستوى**

الافقي وعمودي وعلى الرأسي ومعلوم ابعاد كل من أضلاعه اب ، ب ح ، ح ا والمطلوب رسم مسقطي ذلك المثلث عندما يميل أحد أضلاعه اب على المستوى الرأسي بالزاوية ه وبحيث تبعد النقطة ا عن المستوى الرأسي ببعد معلوم ايضا

**المفروض** — المثلث ا ب ح الذي يميل بالزاوية ٣٠° مع المستوي الافقي ، اب = ٤سم ، ب ح = ٤٫٥ سم ، ح ا = ٥٫٥سم بحيث يميل ضلعه اب بالزاوية ٤٥° مع المستوى الرأسي وتبعد النقطة ا منه بمقدار ١ سم عن المستوى الرأسي

**والمطلوب** : — رسم مسقطي ذلك المستوى على كل من مستويي المسقط



شكل (٢٠٥)

**العمل** : — نرسم أثري المستوى لم ه بحيث يميل أثره الرأسي لم بزاوية ٣٠° وأثره الافقي م ه عمودي على خط الارض . ثم نرسم خطا مستقيما موازيا لخط الارض ويبعد عنه بمقدار ١ سم وهو بعد النقطة ا عن المستوى الرأسي وننتخب عليه نقطة مثل ا٢ تكون ا٢ وضع النقطة ا بعد الانطباق ثم نرسم ا٢ ب٢ يميل بالزاوية ٤٥° مع خط الأرض ونأخذ عليه البعد ا٢ ب٢ يساوي ٣ سم فتكون ب٢ وضع النقطة ب بعد الانطباق ثم نركز في ا٢ وببعد يساوى ٥٫٥ سم ونرسم قوسا ثم نركز في ب٢ وببعد يساوى ٤٫٥ سم ونرسم قوسا يقطع القوس الاول في ح٢ تكون ح٢ وضع النقطة ح بعد الانطباق . بعد ذلك تتحول المسألة إلى كيفية إرجاع النقط الثلاث ا٢ ، ب٢ ، ح٢ إلى وضعها

قبل الدوران وهذا كما بالمسألة ٤٦ بايجاد مسقطى كل نقطة على حده ينتج مسقطى المثلث اَ بَ حَ و ا ب حـ وهو المطلوب شكل ٢٠٥

**تنبيه** : —

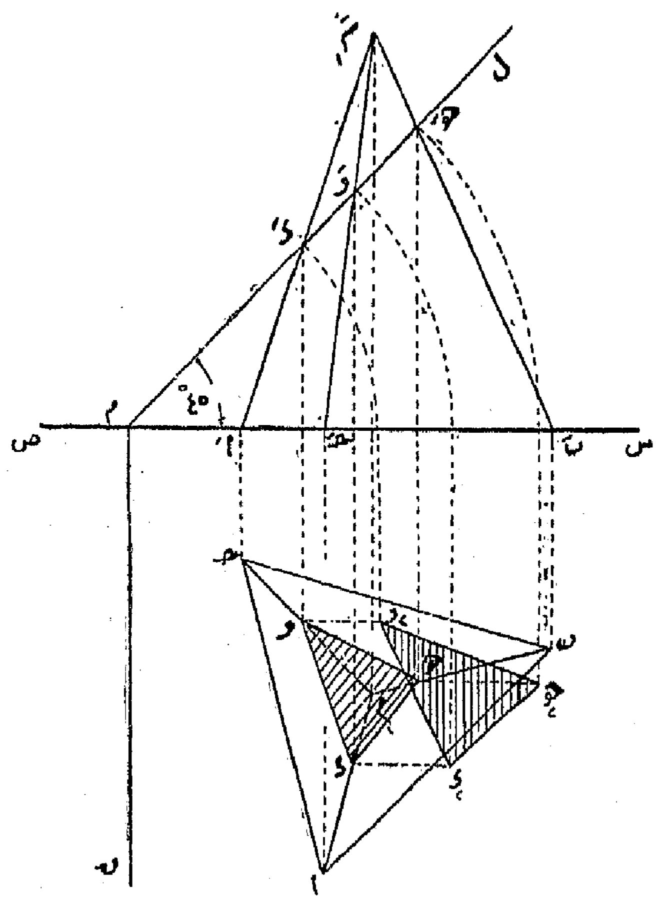
يمكن إذا رسم أى شكل مستو معلوم إبعاده بأى شرط كان بواسطة طريقة انطباق المستويات وهذا من الصعب رسمه بغير تلك الطريقة وسيأتى الكلام على أحوال أصعب من هذه فى الباب التالى

**مسألة ٤٨ — تعيين الشكل الحقيقى لقطاع فى جسم مقطوع بمستو عمودى بطريقة دوران المستوى القاطع وانطباقه على أحد مستويى المسقط بعد تعيين مسقطى ذلك القطاع**

(١) **المفروض** الهرم الثلاثى م، ا ب حـ المقطوع بالمستوى ل م ن الذى يميل بزاوية ٤٥° مع المستوى الافقى وعمودى على الرأسى

**والمطلوب** تعيين مسقطي القطـاع وايجـاد الشـكل الحقيقى للقطـاع شكل (٢٠٦)

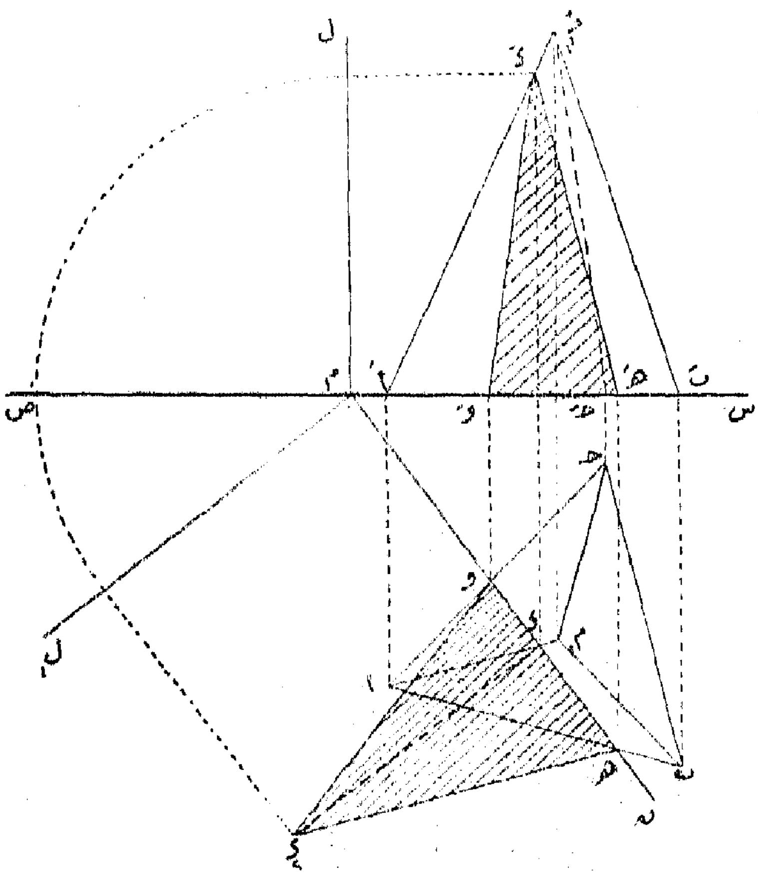
**العمل — الأثر** الرأسى ل م للمستوى القاطع يقطع المساقط الرأسية لاحرف اوجه الهرم مَ، اَ




شكل (٢٠٦)

و مَ، بَ و مَ، حَ فى النقط الثلاث ءَ و هَ و وَ على التوالى والمساقط الافقية لاحرف الاوجه

نفسها وهي ء ى هـ ى و على التوالى . صار اذا من المعلوم المسقطان الرأسى والافقى للقطاع وبذا قد تحولت المسألة الى ايجاد الشكل الحقيقى للشكل المستوى المبين مسقطاه الرأسى والافقى فى ءَ هَ وَ ى ء هـ و على التوالى الموجود فى المستوى العمودى ل م ن فيجرى العمل بطريقة الانطباق كما فى مسألة ٤٥ ومن الشكل (٢٠٦) يتضح ان الشكل الحقيقى هو ء٢ هـ٢ و٢ وهو المطلوب



شكل (٢٠٧)

(ب) **المفروض** : الهرم الثلاثى م٢ ا ب حـ المقطوع بالمستوى ل م ن الذى يميل بزاوية ٤٥° على المستوى الرأسى وعمودى على المستوى الافقى

**والمطلوب** : ايجاد الشكل الحقيقى للقطاع شكل (٢٠٧)

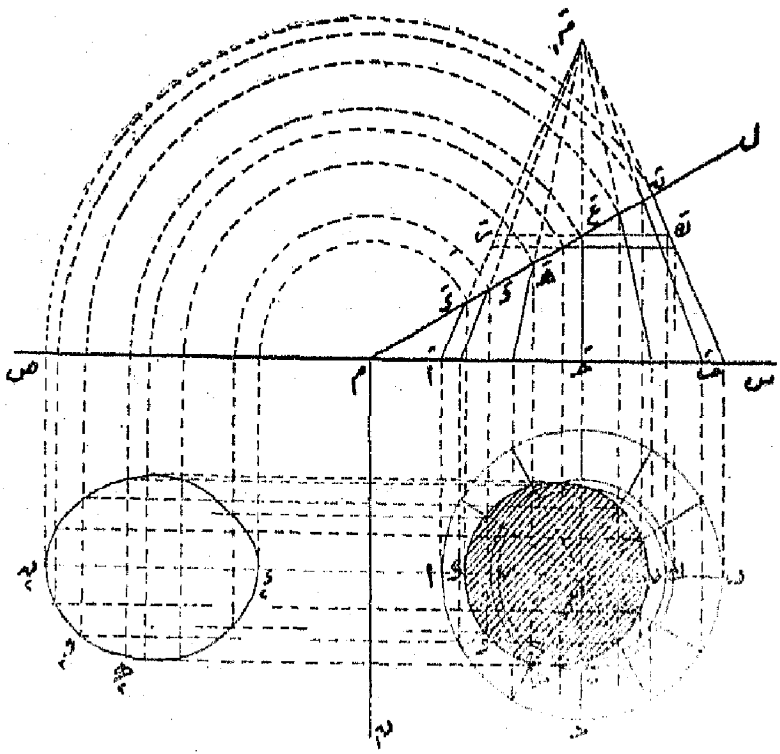
**العمل** : الاثر الافقى المستوى القاطع قطع المسقط الافقى لحرف الهرم م٢ ا فى ء وقطع ايضا المسقطين الافقيين لحرفى القاعدة ا ب ى ا حـ فى هـ ى و على التوالى والنقط الثلاث ء ى هـ ى و تكوّن مسقطا افقيا لمثلث هو شكل القطاع مسقطه الرأسى

واقع على المسقط الرأسى للحرف م،١ وعلى المسقطين الرأسيين لحرفى القاعدة اَ بَ ، اَ حَ عند النقط ءَ ، هَ ، وَ على التوالى . وهذا القطاع المثلثى واقع فى المستوى القاطع طبعا وهو المستوى العمودى على الرأسى ل م ﻫ فبدوران ذلك المستوى حول اثره الافقى م ﻫ ومعه القطاع حتى ينطبق على المستوى الافقى ينتج الشكل الحقيقى للقطاع ء٢ ﻫ و شكل ( ٢٠٧ ) وهو المطلوب

**مسألة ٤٩ : تعيين الشكل الحقيقى لقطاع فى مخروط مقطوع بمستو عمودى بطريقة دوران المستوى القاطع وانطباقه على أحد مستويى المسقط بعد تعيين مسقطى القطاع المذكور**

( ا ) **المفروض** : المخروط م ا ب ح المقطوع بمستوى ل م ﻫ عمودى على الافقى ومائل على الرأسى ويقطع جميع رواسم المخروط وليس عموديا على محور ذلك المخروط شكل (٢٠٨) والمطلوب تعيين مسقطى القطاع وايجاد الشكل الحقيقى

**العمل** : المسقط الرأسى لقطاع المخروط واقع على الأثر الرأسى للمستوى القاطع



شكل ( ٢٠٨ )

بين ءَ ن هَ وواقع أيضا على جميع رواسم المخروط عند نقط مثل ءَ ن هَ وَنَ عَ
ن هَ الخ ولايجاد المسقط الافقى للقطاع نعين أولا مساقط رأسية وافقية لجملة رواسم للمخروط ويستحسن تقسيم محيط القاعدة الى أقسام متساوية ويصل من الرأس لتلك الاقسام فى المسقط الافقى ينتج المساقط الافقية لتلك الرواسم ثم نعين مساقطها الرأسية باسقاط نقط التقسيم على المسقط الرأسى للقاعدة وتوصيلها بالرأس فى المسقط الرأسى بعد ذلك نرى أن المستوى القاطع يقطع المساقط الرأسية للرواسم فى نقط مثل ءَ ن هَ ن وَ ن عَ ن هَ الخ نأت بمساقطها الافقية وهى واقعة على المساقط الافقية لتلك الرواسم عند النقط ء ن هـ ن و ن ع ن هـ الخ التى تكوّن شكل المسقط الافقى للقطاع

يمكن بهذه الطريقة ايجاد المساقط الافقية لجميع النقط فقط لايمكن بها ايجاد المسقط الافقى للنقطة عَ الواقعة على راسم رأسى ولهذا نقطع المخروط بمستو افقى مثل المستوى كَ عَ سَ الذى يكون مسقطه الافقى دائرة نصف قطرها عَ سَ وتكون ع نقطة على محيط تلك الدائرة فاذا ركزنا فى نقطة م، المسقط الافقى لرأس المخروط ورسمنا دائرة نصف قطرها يساوى عَ سَ تقطع المسقط الافقى للراسم م، ع فى نقطة ع هى المسقط الافقى للنقطة ع

وبدوران المستوى القاطع ومعه القطاع وانطباقه على المستوى الافقى كما فى المسألة السابقه ينتج الشكل الحقيقى للقطاع وهو المنحنى ء، هـ، و، ع،

ملاحظة: هذا المنحنى يسمى بمنحنى قطع ناقص ومسقطه الافقى غالبا هو منحنى قطع ناقص وقد يكون مسقطه الافقى محيط دائره فى بعض الاحيان

وكلما قرب المستوى القاطع من الرأس صغر القطع الناقص الى ان يصل فى النهاية الى الصفر

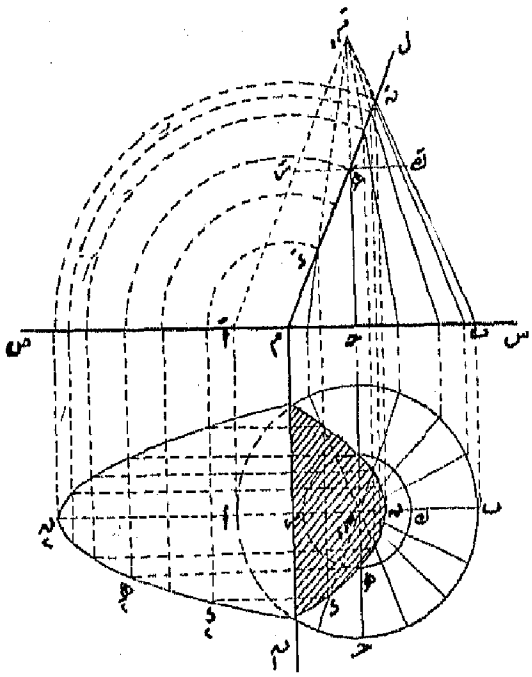
(ب) المفروض: المخروط السابق م، ا ب حـ المقطوع بالمستوى العمودى على الافقى ل م هـ و موازٍ لاحد رواسم المخروط وليكن الراسم م، ا

**والمطلوب** : تعيين مسقطى القطاع وشكله الحقيقى

**العمل** : نجرى كما سبق فى الحالة ا تماما وذلك واضح بالشكل ( ٢٠٩ )

**ملاحظة** : الشكل الحقيقى لمنحنى القطاع هنا يقال له منحنى قطع مكافىء و كذلك يسمى منحنى مسقطه الافقى

نهاية القطع المكافىء ( اى عندما يكون المستوى القاطع مماسا للمخروط هو خط مستقيم



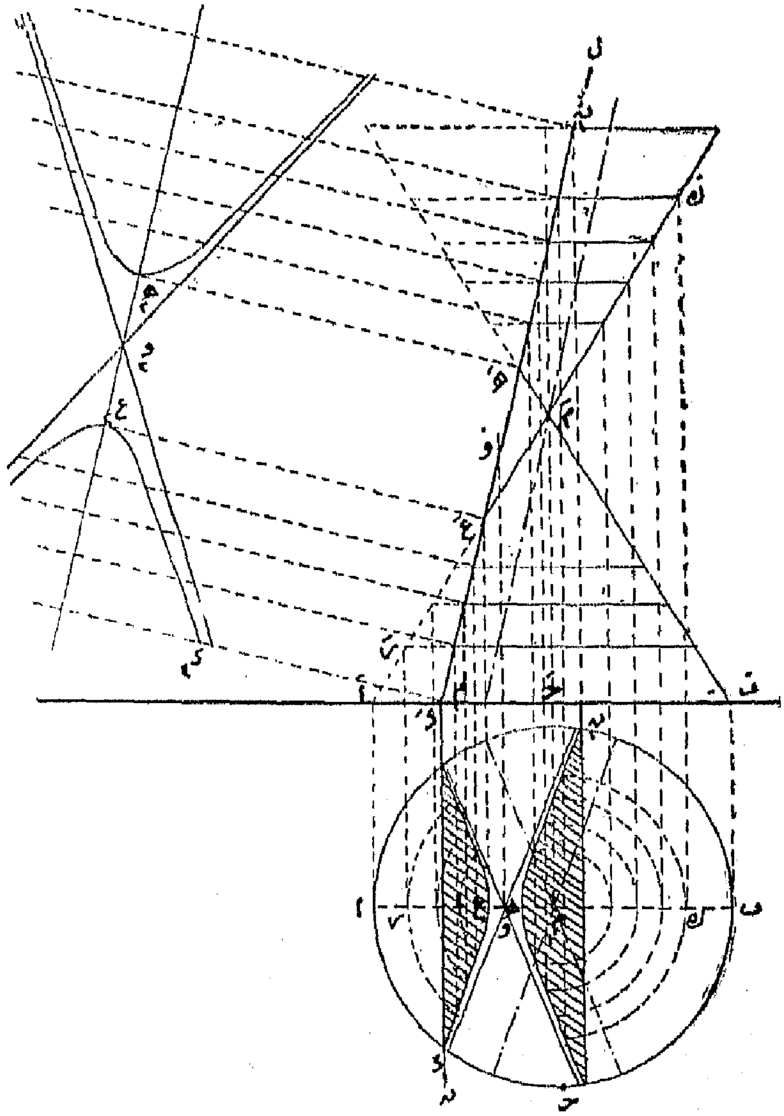
شكل ( ٢٠٩ )

( حـ ) **المفروض** : المخروط السابق م١ ا ب حـ المقطوع بالمستوى العمودى علي الافقى ل م ن ومواز لراسمين من رواسمه او بمعنى آخر قاطع للسطح المخروطي فى جهتين مختلفتين من الرأس شكل ( ٢١٠ )

**والمطلوب** : تعيين مسقطى القطاع وشكله الحقيقى

**العمل** : يمكن ان نجرى العمل كما سبق فى الحاله ( ب ) تماما ولكن بما ان المستوى ل م ن يقطع الرواسم فى زاوية حادة فيحسن استعمال المساقط الرأسية والافقيه لجملة دوائر مرسومة على سطح المخروط فالاثر الرأسى ل م يقطع المساقط الرأسية لتلك الدوائر فى نقط تكوّن المسقط الافقى لشكل القطاع يمكن ايجاد مساقطها الافقية من المساقط الافقية لتلك الدوائر وواضح من الشكل كيفية العمل وقد ادير هنا المستوى القاطع حول أثره الرأسى حتى انطبق على المستوى الرأسى

**ملاحظة** : يقال لشكل القطاع هنا منحنى قطع زائد ويتكون من منحنين على ناحيتين مختلفتين من رأس المخروط



شكل ( ٢١٠ )

**ملاحظة :** نهاية القطع الزائد ( اى عندما يصل المستوى القاطع للرأس م١) هو خطين متقاطعين فى الرأس كما بالشكل ( ٢١٠ )

يتضح مما تقدم أن قطاعات المخروط بمستو عمودى يتكون منها منحنيات يطلق عليها القطاعات المخروطية وتتلخص فيما يلى : —

أولا — (قطاع دائرى) إذا كان المستوى القاطع عموديا على محور المخروط القائم

ثانيا — قطاع يطلق عليه منحنى (قطع ناقص) إذا كان المستوى القاطع يقطع جميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من الرأس ومائلا على محوره شكل ٢٠٨

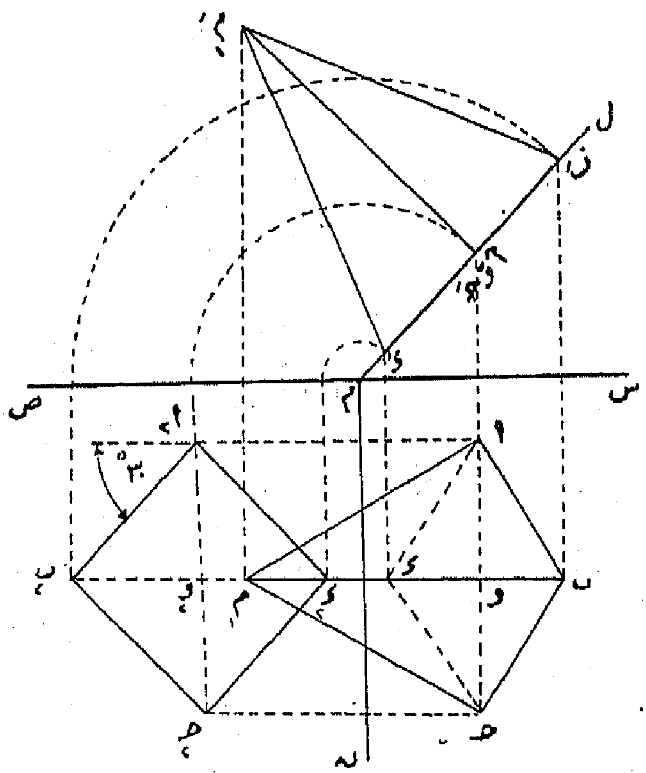
ثالثا — قطاع يطلق عليه منحنى (قطع مكافىء) إذا كان المستوى القاطع موازيا

لاحد رواسم المخروط وهذا لا بد وأن يقطع قاعدة المخروط أيضا شكل ٢٠٩

رابعا — قطاع يطلق عليه منحنى (قطع زائد) إذا كان المستوى القاطع موازيا لراسمين من رواسم المخروط وهـذا لابد وأن يقطع سطح المخروط وامتداده من جهة الرأس فى منحنيين فى جهتين مختلفتين من رأس المخروط شكل ٢١٠

وسيأتى الكلام بالتفصيل على القطاعات المخروطية وخواصها الشهيرة وطرق مختلفة لرسم كل منها فى الجزء الثانى من الكتاب

**مسألة ٥٠ — تعيين مسقطى هرم بمعلومية ابعاده وميل احد اوجهه أو قاعدته على أحد مستويى المسقط وبشروط معينة أخرى**



شكل (٢١١)

**المفروض : —** هرم رباعى قائم م، ا ب حـ ى شكل (٢١١) طول ضلع قاعدته المربعة ٣سم وارتفاعه ٤ سم

**والمطلوب : —** رسم مسقطى الهرم المذكور بحيث يميل قاعدته على المستوى الافقى بزاوية ٤٥° ويميل أحد أضلاع قاعدته اب بزاوية ٤٥° مع المستوى الرأسى وبحيث يبعد أحد اركان قاعدته ا بمقدار ١ سم

**العمل :** نرسم اولا مستوى القاعدة وهو المستوى لم له شكل (٢١١) بحيث يميل أثره الرأسى لم بزاوية ٤٥° مع خط الارض وبحيث يكون اثره الافقى م له عمودا عليه . وبما ان قاعدة الهرم المذكور موجودة فى هذا المستوى فيمكننا ان نطبق

هذا المستوى على أحد مستويي المسقط وليكن على المستوى الأفقي وتعين عليه مواضع قاعده الهرم بعد الانطباق بشروطها المعينة بان نرسم خطا أفقيا موازيا لخط الأرض ويبعد عنه بمقدار بعد النقطة ا عن المستوى الرأسي وهو اسم ثم ننتخب عليه نقطة مثل ا٢ تكون هي موضع النقطة ا بعد الانطباق ونرسم ا٢ ب٢ يساوى ٣ سم وهو طول أحد اضلاع القاعدة بحيث يميل على الارض بزاوية ميل الضلع ا ب على المستوى الرأسي وهي هنا ٤٥° يكون ا٢ ب٢ هو الضلع ا ب بعد الانطباق ثم نكون عليه المربع ا٢ب٢ح٢ء٢ يكون هو موضع اضلاع قاعدة الهرم بعد الانطباق ونعين ايضا مركز القاعدة و٢ وهى موقع العمود النازل من رأس الهرم على القاعدة ثم نرجع قاعدة الهرم ومركزها الى مسقطيها قبل الدوران بالطريقة المشروحة فى مسألة (٤٦) وليكن المسقطان هما اَبَحَءَوَ ، ا ب ح ء و

ويلاحظ ان المسقط الراسى للقاعدة بما فى ذلك مركزها وَ واقع باكمله على الأثر الرأسى ك م . بعد ذلك نقيم عمودا من وَ على الأثر الرأسى ك م ومن و عمودا على الأثر الافقى م ه فهذان العمودان هما المسقطان الرأسي والافقى لارتفاع الهرم فاذا أخذنا وَمَ يساوى ارتفاع الهرم لأنه مسقط موازى للمستوى الرأسى فهو بعد حقيقي تكون مَ ١ هى المسقط الرأسى لرأس الهرم ، م١ مسقطها الافقى على الخط و م١

فنصل مَ١ بالمساقط الرأسية لاركان القاعدة يتكون المسقط الرأسى للهرم مَ١ اَبَحَءَ ونصل م بالمساقط الافقية لاركان القاعدة يتكون المسقط الأفقى له م١ ا ب ح ء وهو المطلوب

نتيجة :

يمكن اذا بطريقة دوران المستويات العمودية رسم مسقطى أى جسم منشورى أو اسطوانى أو هرم أو مخروطى الخ بمعلومية ابعاده وميل أحد أوجهه على أحد مستويي المسقط فى أوضاع مختلفة وبشروط معينة يكون من الصعب استيفائها بالطرق غير دوران المستويات أو المستويات المساعدة ولذا يحسن بالطالب أن يعطي اهتماما زائدا بهذا الباب .

## ثانيا — دوران مستوى مائل حول أحد أثريه وانطباقه على أحد مستوى المسقط

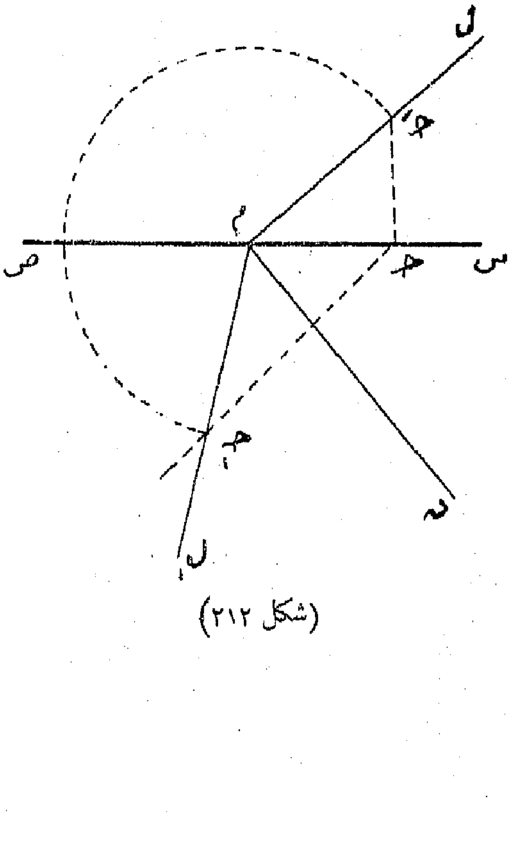
**المفروض** : المستوى ل م ﻫ المعلوم ميله على كل من مستويى المسقط ولتكن θ زاوية ميله على الافقى و Φ زاوية ميله على المستوى الرأسى

**والمطلوب** : دوران المستوى ل م ﻫ حول أحد اثريه وانطباقه على أحد مستويى المسقط

**العمل** :

**( ا ) : دوران المستوى حول أثره الافقى وانطباقه على المستوى الافقى**

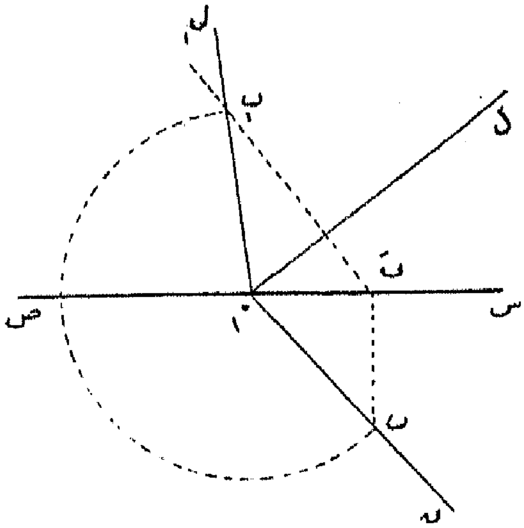
نعين أولا أثرى المستوى الذى يميل بالزاوية θ و Φ على المستوى الافقى والرأسى على التوالى بالطريقه المذكورة فى مسألة ٢٠ صفحة ٨٣ . وليكن المستوى هو ل م ﻫ شكل ٢١٣ ثم ننتخب نقطة على الأثر الرأسى مثل حـَ ونأتى بمسقطها الأفقى وهو على خط الأرض فاذا دار المستوى تكون المسافة م حـَ ثابتة فى كل وضع من أوضاع المستوى اثناء تحركه ويكون المحل الهندسى لمسقط حـ الافقى أثناء الدوران هو خط مستقيم عمودى على الاثر الافقى م ﻫ فنركز فى م وبنصف قطر يساوى م حـَ ونرسم قوسا ونرسم من حـ عمودا على الاثر الافقى م ﻫ ونمده الى أن يلاقى القوس المذكور فى حـ١ ثم نصل م حـ١ يكون هو الأثر الرأسى للمستوى ل م ﻫ بعد انطباقه على المستوى الافقى وهو المطلوب




(شكل ٢١٢)

(ب) دوران المستوى وانطباقه على المستوى الرأسى : —

نعين المستوى كما سبق وليكن ل م ه (شكل ٢١٣) ثم ننتخب اى نقطة مثل ب علي الأثر الأفقي م ه ونعين مسقطها الرأسى وهو بَ على خط الأرض فاذا أدرنا المستوى ل م ه حول اثره الرأسى تظل المسافة م ب ثابتة اثناء دورانه الى ان ينطبق على المستوى الراسى وعند ذلك يكون المحل الهندسى للمسقط الرأسى للنقطة ب هو العمود النازل من بَ علي الاثر الرأسى ل م فنركز فى م وبنصف قطر م ب ونرسم قوسا من دائرة ومن بَ ننزل عمودا على ل م ونمده الى أن يلاقى القوس



(شكل ٢١٣)

المذكور فى نقطة مثل ب١ فنصل م ب١ يكون هو الاثر الافقى المستوى ل م ه بعد الانطباق وهو المطلوب

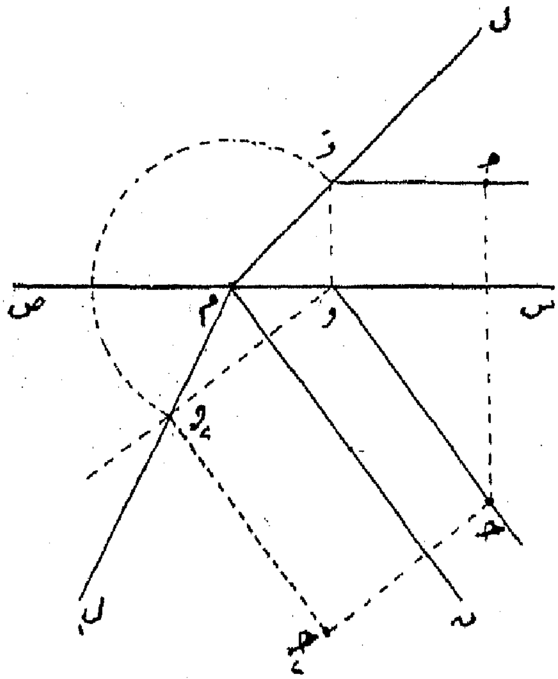
**مسألة ٥١ — طريقة ايجاد وضع نقطة موجودة فى مستو مائل معلوم بعد انطباقه على احد مستويى المسقط :**

المفروض المستوى ل م ه ونقطة مثل حـ واقعة على ذلك المستوى شكل ٢١٤

والمطلوب : ايجاد موضع النقطة حـ بعد دوران المستوى ل م ه حول أثره الافقى وانطباقه على المستوى الافقى

نرسم الخط الافقى الموجود فى المستوى ل م ه ومار بالنقطة حـ بان نرسم خطا افقيا من حـَ ونمده الى ان يقابل الاثر الرأسى ل م فى وَ ثم من حـ نرسم خطا موازيا للأثر الافقى م ه ونمده الى ان يلاقى خط الارض فى و تكون هى المسقط الافقى للنقطة وَ وواقعة على العمود النازل منها على خط الارض حسب ما ذكر سابقا فى

خاصية الخط الافقي فاذا أدرنا المستوى حول اثره الافقي م ن الى أن ينطبق على المستوى الافقي يظل الخط ح و افقيا وموازيا للأثر الافقي م ن وبعد الانطباق يكون ح و موازيا للأثر الافقي م ن ٠ فاذا عينا موضع النقطة و بعد الانطباق وهي نهاية الخط ح و ولتكن و٢ ورسمنا منها خطا و٢ ح٢ موازيا للخط م ن يكون هذا الخط هو وضع الخط ح و بعد الانطباق ويكون المحل الهندسي للنقطة ح عليه هو خط عمودي على م ن من ح فاذا رسمنا من



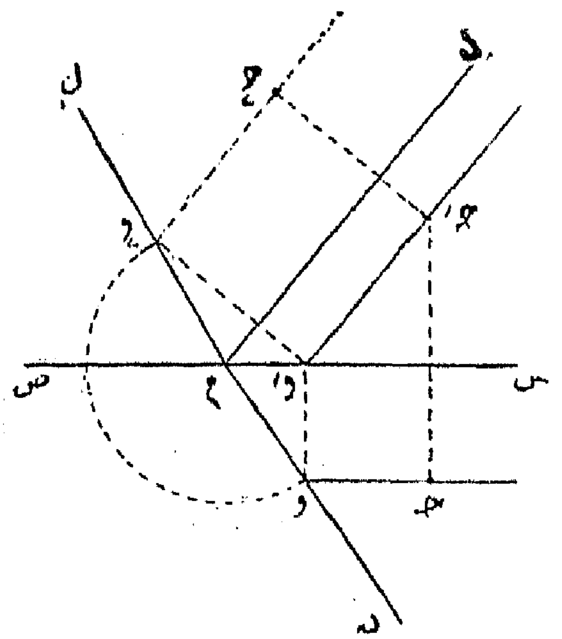
شكل (٢١٤)

ح عمودا على م ن الى أن يقابل الخط و٢ ح٢ في ح٢ تكون ح٢ هي الموضع المطلوب للنقطة ح بعد الانطباق شكل (٢١٤) وهو المطلوب

(ب) **المفروض** : المستوى ل م ن ونقطة مثل ح واقعة على ذلك المستوى شكل (٢١٥)

**والمطلوب** : ايجاد موضع النقطة ح بعد دوران المستوى ل م ن حول اثره الرأسي وانطباقه على المستوى الرأسي

**العمل** : نرسم خطا مستقيما موازيا للمستوى الرأسي في المستوى ل م ن ومارا بالنقطة ح بان نرسم من ح خطا موازيا لخط الارض ونمده حتى يلاقي الأثر الأفقي م ن في نقطة مثل و ونأتي بالمسقط الرأسي للنقطة و وهي وَ على خط الارض ومن وَ نرسم خطا موازيا للأثر الرأسي ل م فلا بد وأن يمر بالنقطة حَ المسقط

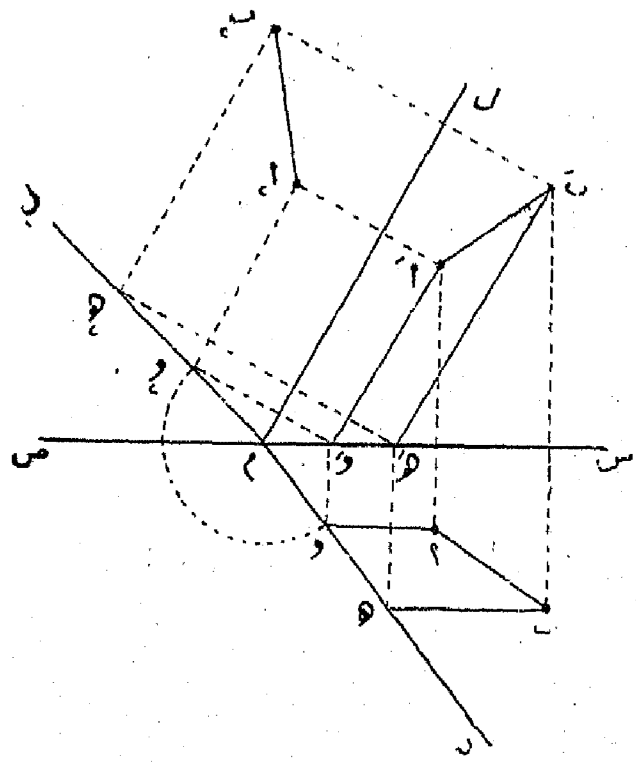


شكل (٢١٥)

الرأسى للنقطة وهو حـ . بعد ذلك نركز فى م وبنصف قطر يساوى م و ونرسم قوساً ومن و نرسم عمودا على ل م ونمده حتى يقابل القوس المذكور فى و٢ ثم نصل و٢ م يكون هو الأثر الأفقى الجديد بعد الانطباق ثم نرسم من النقطة و٢ الخط و٢ حـ٢ موازيا الى لام وهذا وضع الخط و حـ بعد الانطباق فاذا رسمنا عمودا من حـ على الأثر ل م ليقابل الخط و٢ حـ٢ فى حـ٢ تكون حـ٢ هى موضع النقطة حـ بعد انطباق المستوى على المستوى الرأسى شكل (٢١٥) وهو المطلوب

نتيجة :

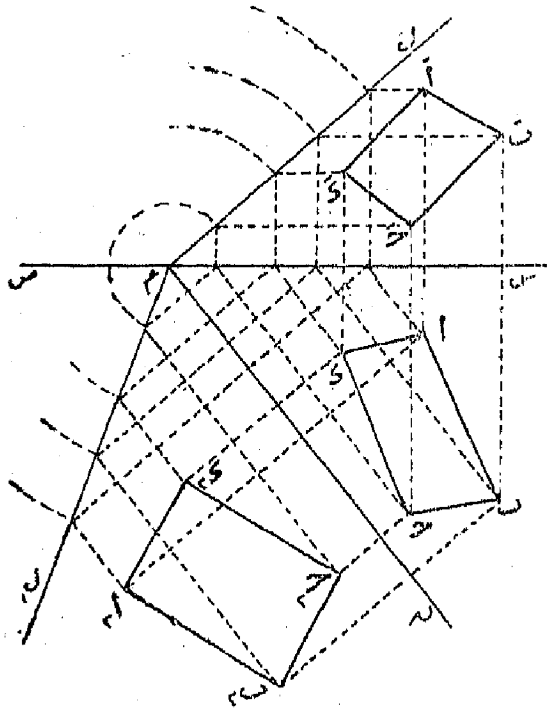
أولا : يمكن ايجاد وضع أى خط مستقيم معلوم مسقطاه موجود فى مستوى أيا كان ومعلوم ميل هذا المستوى على كل من مستوى المسقط وذلك بايجاد موضعي نقطتين منه بالطريقة المشروحة فى المسألة السابقة فالخط ا٢ ب٢ هو موضع الخط ا ب الموجود فى المستوى ل م ن شكل (٢١٦) وواضح بالشكل المذكور طريقة العمل والخط ا٢ ب٢ هو الطول الحقيقي للخط ا ب



شكل (٢١٦)

ثانيا : يمكن إيجاد الشكل الحقيقي ووضع أى شكل مستو موجود فى مستوى معلوم ميله على كل من مستويى المسقط بمعلومية مسقطي ذلك الشكل على كل من مستويى المسقط وذلك بتمرير خطوط أفقية برؤوسه إن كان مضلعا أو بعدة نقط عليه إن كان منحنيا وإيجاد مواضعها بعد الانطباق

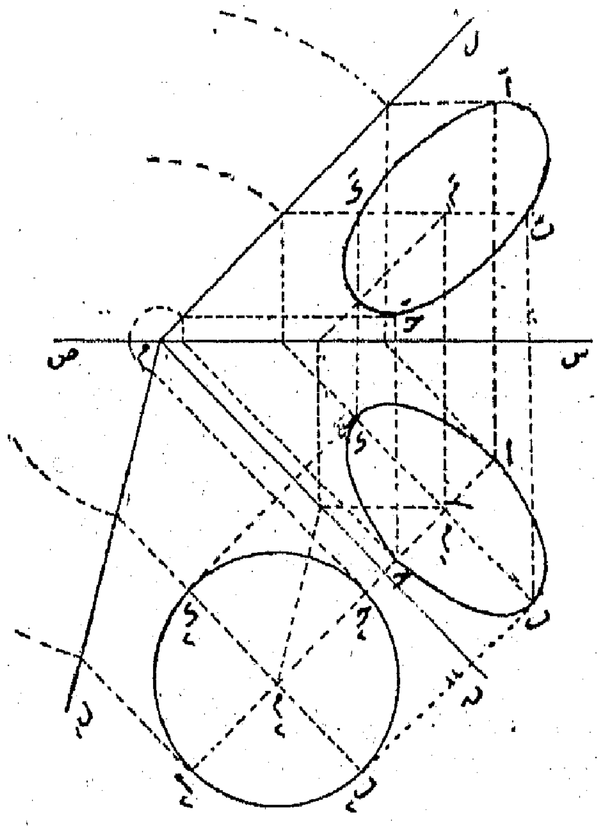
فالشكل ا٢ ب٢ حـ٢ ء٢ هو الشكل الحقيقى وموضع المضلع ا ب حـ ء الموجود فى المستوى ل م ه شكل (٢١٧)



(شكل ٢١٧)

وكذا الشكل ا٢ ب٢ حـ٢ ء٢ هـ٢ هو الشكل الحقيقى ووضع الدائرة ا ب حـ ء الموجودة فى المستوى ل م ه شكل (٢١٨)

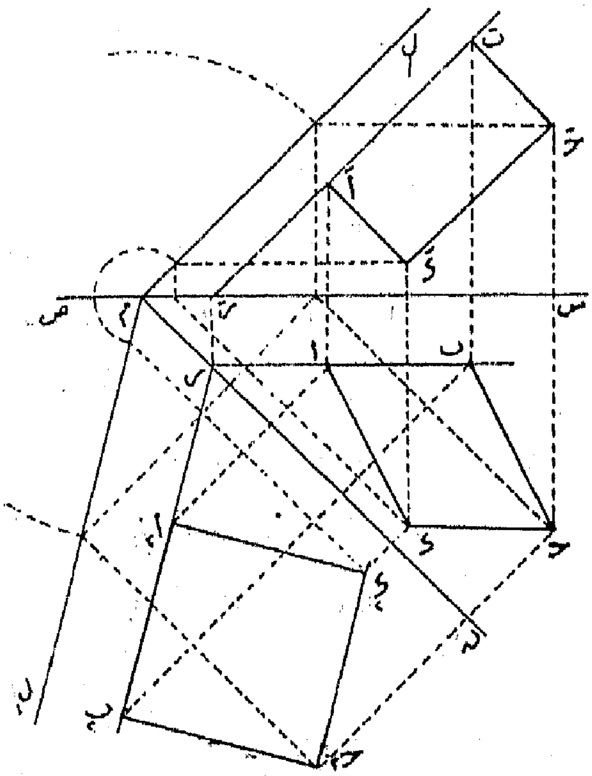
**مسألة : (٥٢) — تعيين مسقطى شكل مستوى أيا كان معلوم أبعاده وزاويتى ميل مستويه على كل من مستويى المسقط بشروط معينة**



(شكل ٢١٨)

(١) **المفروض** : المربع ا ب حـ ء طول ضلعه ٣ سم موجود فى مستوى يميل بالزاويتين θ و Φ على الافقى والرأسى على التوالى

والمطلوب : إيجاد مسقطي هذا المربع بحيث يكون أحد أضلاعه اب موازيا المستوى الرأسى ويبعد عنه بمقدار ١ سم



شكل (٢١٩)

العمل : — نرسم أثرى المستوى المحتوى على المربع وهو الذى يميل بالزاوية θ مع الافقى و Φ مع الرأسى بالطريقة المعروفة وليكن المستوى ل م له شكل (٢١٩) ثم نرسم خطا موازيا لخط الارض فى المسقط الافقى ويبعد عن خط الارض بمقدار ١ سم مثل الخط ا ب ونمده من جهة ا إلى ان يلاقي الاثر الافقى م له فى نقطة ر مسقطها الرأسى رَ على خط الارض ونرسم من رَ خطا موازيا للاثر الرأسى ل م يكون هو المسقط الرأسى للخط ر ا ب بفرض أنه فى المستوى ل م له ونعيّن عليه المسقطين الرأسيين للنقطتين ا و ب وهما اَ و بَ

ثم ندير المستوى ل م له حول أثره الافقي م له ومعه المستقيم اب إلى أن ينطبق على المستوى الافقى وليكن ل٢م هو الاثر الرأسى بعد الانطباق و ا٢ب٢ هو موضع الخط اب بعد انطباق المستوى وهو فى هذه الحالة موازيا للأثر الرأسى كما كان موازيا له قبل الدوران

ثم نأخذ على المستقيم ا٢ب٢ ابتداء من ا٢ بعدا يساوى ٣ سم وليكن ا٢ب٢ وهو ضلع المربع المطلوب ونكوّن على هذا الضلع المربع ا٢ ب٢ ﺣ٢ ى٢ وهو وضع المربع المطلوب ايجاد مسقطيه بعد انطباق المستوى ل م له على

الافقى ثم نرجع المستوى ل، م له الى وضعه الاصلى ومعه المربع فينتج مسقطي المربع آ بَ حَ ءَ ، ا ب حـ ء وهو المطلوب

ب ــ المفروض: الدائرة م، نصف قطرها ٢ سم الموجود فى المستوى الذى يميل بالزاوية θ مع الافقى والزاوية Φ مع الرأسى

والمطلوب : تعيين مسقطى تلك الدائرة بشرط أن يبعد مركزها عن المستوى الرأسى بمقدار ٣ سم

العمل : نرسم أولا المستوى ل م له يميل بالزاوية θ مع الافقى والزاوية Φ مع الرأسى شكل (٢١٨) ثم ننتخب نقطة مثل م، فى المسقط الافقى تحت خط الارض وتبعد عنه بمقدار ٣ سم وتأتى بالمسقط الرأسى لتلك النقطة بفرض أنها موجودة فى المستوى ل م له وليكن مَ، مسقطها الرأسى ثم ندير المستوى ل م له حول أثره الافقى م له الى أن ينطبق على المستوى الافقى عند ل، م له ومعه النقطة م، فتأخذ الوضع م٢ ونجعل م٢ مركزا للدائرة المطلوبة وبنصف قطر يساوى ٢ سم ونرسم دائرة

ثم نرجع المستوى ل، م له ومعه الدائرة م٢ الى وضعه الاصلى فينتج مسقطي الدائرة م، كما هو مبين بالشكل وهو المطلوب .

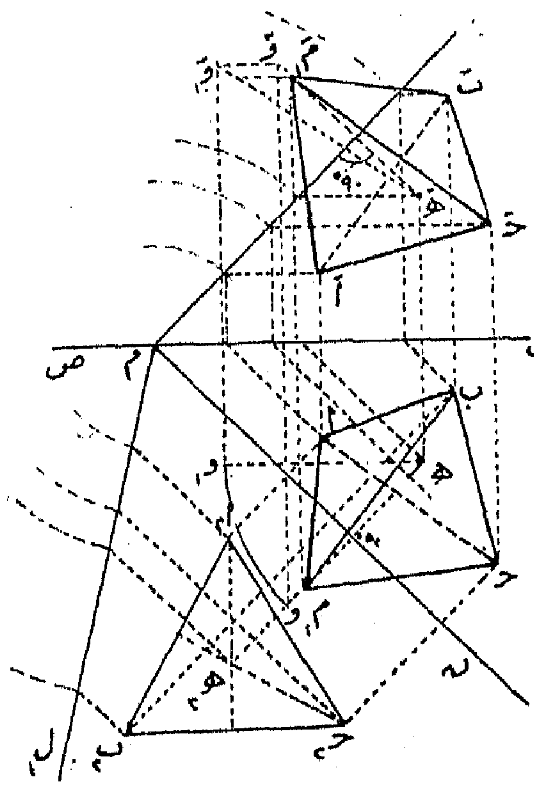
وبهذه الطريقة يمكن إيجاد مسقطي أى شكل مستوى معلوم إبعاده الحقيقية وميله فى الفراغ مضلعا كان أو منحنيا مهما كان شكله .

**مسألة (٥٣) : طريقة ايجاد مسقطى اى جسم فى أوضاع مختلفة وبشروط معينة**

المفروض : هرم ثلاثى قائم م، ا ب حـ قاعدته مثلث ا ب حـ متساوى الاضلاع معلوم طول أحد أضلاعه ومعلوم طول ارتفاع ذلك الهرم

والمطلوب : ايجاد مسقطى ذلك الهرم بشرط ان تميل قاعدته على المستوى الافقى بزاوية θ وعلى المستوي الرأسى بزاوية Φ

العمل : نعلم أن قاعدة الهرم موجودة فى مستو يميل بالزاوية θ ، Φ على كل من مستويى المسقط الافقي والرأسى على التوالى فنبدأ أولا برسم أثرى هذا المستوى وليكن المستوى ل م ن شكل (٢٢٠) ثم نديره الى أن ينطبق على أحد مستوى المسقط وليكن على المستوى الافقى فينطبق اثره الرأسى ل م على المستوى الافقي ويأخذ الوضع ل١م بعد الانطباق ثم نرسم الشكل الحقيقى لقاعدة الهرم بابعادها الحقيقية المطلوبة ولتكن ا٢ ب٢ حـ٢ وكذا نعين مركزها وليكن ء٢ ثم نرجع المستوى ل١ م ن الى وضعه قبل الدوران ومعه قاعدة الهرم المذكور وليكن مسقطا



شكل (٢٢٠)

القاعدة هما اَ بَ حَـ ، ا ب حـ ومسقطا مركزها هما ءَ ، ء . ثم نرسم من ء عمودا على المستوى ل م ن أو بمعنى آخر من ءَ نرسم عمودا على ل م ، من ء نرسم عمودا على م ن ونأخذ على ذلك العمود أى نقطة مثل و ونأتى بالطول الحقيقى للجزء ء و ونأخذ عليه الطول الحقيقى لارتفاع الهرم وليكن ء م١ ونعين مسقطى نقطة الرأس م١ وليكن مسقطاها مَ١ ، م١ ثم نصل مَ١ بالنقط اَ ، بَ ، حَـ يتكون المسقط الرأسى للهرم ونصل م١ بالنقط ا ، ب ، حـ يتكون المسقط الافقى للهرم ويجب مراعاة الخطوط الشعاعية وغير الشعاعية اذا كانت احرف الاوجه غير ظاهرة أو ظاهرة على التوالى وهو المطلوب

تنبيه :

يمكن بنفس الطريقة رسم أي جسم آخر كالمنشور والمكعب والاسطوانة والهرم الرباعي والمخروط الخ متى علمنا ابعاده الحقيقية وميل اى وجه من أوجهه على كل من مستوى المسقط أو على كليهما بان نرسم المستوى المحتوى على ذلك الوجه أولا كما سبق فى المسألة السالفة ثم نعين مسقطى خط مستقيم فى ذلك المستوى ويميل بالميل المطلوب على كل من مستوى المسقط وبعد ذلك نطبق المستوى ومعه الخط على أحد مستوى المسقط فيجعل هذا الخط وهو منطبقا على أحد مستوي المسقط ضلعا من الوجه الذى يميل بالميل المطلوب ورسم باقى أضلاع الوجه المعلوم عليه مثلثا كان او مربعا أو أى مضلع أو منحنى بشكله الحقيقي بعد ايجاد مركزه اذا لزم الحال وبعد ذلك نعين مسقطى نقطة الرأس اذا كان هرما او مخروطا او أحرف اوجهه ان كان منشوريا أو اسطوانيا وذلك برسم أعمدة علي الأثرين الرأسى والافقى من المسقط الرأسى والافقى على التوالى لمركز القاعدة اذا كان هرما أو مخروطا أو رسم أعمدة من المساقط الرأسية والافقيه لنقط اركان القاعدة الذى تم ايجاد مسقطيها على الأثر الرأسى والافقى لمستويها على التوالى ان كان الجسم منشوريا أو اسطوانيا والاستمرار فى العمل كما توضح فى المسألة (٥٣) الى أن يتم المسقطان الرأسى والافقى للجسم وهو المطلوب .

وبذلك يمكننا أن نستخلص مما سبق ان طريقة دوران المستويات المائلة فى الفراغ وانطباقها على أحد مستوى المسقط تساعدنا كثيرا على ايجاد مساقط الاجسام فى أوضاع مختلفة وبشروط معينة مما يصعب ايجاده بطريقة أخرى

وسنترك للطالب فرصة التفكير والتخيل عند حل المسائل المتعلقة بهذا الباب حيث لا يمكن حصرها كلها فى مسائل محلولة لكثرة انواعها ولذا اكتفينا بحل بعضها .

## تمرينات (٦)

على دوران المستويات حول احد اثريها وانطباقها على احد مستويي المسقط

(١) ارسم مسقطي مستقيم مثل ا ب تبعد كل من النقطتين ا ، ب منه عن المستوى الرأسي بمقدار ٣ ، ٢ سم على التوالي بشرط أن يميل المستقيم على المستوى الافقي بزاوية مقدارها ٤٥°

ارسم مسقطي هذا المستقيم اذا كان في مستو يميل بالزاوية ٤٥° ، ٦٠° على الافقي والرأسي على المستوى

(٢) ارسم مسقطي المثلث ا ب حـ الموجود في المستوى ل م ن العمودى على الرأس ومائل على الافقي بمقدار ٣٠° اذا كان هذا المثلث متساوى الاضلاع وطول أحد اضلاعه ٣ سم ويبعد مركزه عن المستوي الرأسي بمقدار ٢ سم واحد اضلاعه يميل بزاوية ٤٥° مع المستوى الرأسي

(٣) ا ب حـ هو المسقط الافقي لمثلث يميل مستويه على المستوى الرأسي بزاوية مقدارها ٦٠° والمطلوب ايجاد مسقطه الافقي بشكله الحقيقي

(انتخب أي ثلاث نقط ا ، ب ، حـ على الأثر الافقي)

(٤) ارسم المسقطين الرأسي والافقي لدائرة نصف قطرها ٢ سم يبعد مركزها عن المستوى الافقي بمقدار ٣ سم ويميل مستويها على المستوى الرأسي بمقدار ٣٠° ثم عين مسقطي أي قطر منها يميل بالزاوية ٤٥° مع المستوى الرأسي أيضا

(٥) ارسم المسقطين الرأسي والأفقي لمربع طول ضلعه ٣سم في الاحوال الآتية

أولا — اذا كان مستوى المربع يميل بزاوية ٥٠° مع المستوى الافقي ويميل أحد اضلاعه بزاوية مقدارها ٣٠° مع المستوى الرأسي

ثانيا — اذا كان أحد أضلاعه مائلا بزاوية ٤٥° وضلع آخر منه مائلا بزاوية ٣٠° مع المستوى الرأسي

ثالثا — اذا كانت نقط متتالية من نقط رؤوسه ترتفع بالمقادير ٢٫٥ ، ٣ ، ٣٫٥ سم على التوالي عن المستوى الافقي

رابعا — اذا كان مستويه يميل بالزاوية ٤٥° ٦٠° على الافقي والرأسي على التوالى

(٦) اضلاع مثلث ا ب حـ هى اب = ٥ سم ٯ ب حـ = ٦ ٯ حـ ى = ٧سم
ارسم المسقط الافقى لدائرة تمر بالثلاث نقط ا ٯ ب ٯ حـ بحيث يميل مستوى المثلث بالزاوية ٤٥° مع المستوى الافقى

(٧) دائرة نصف قطرها ٤ سم تميل بالزاوية ٦٠° مع الافقى ٯ ٤٠° مع الرأسى وكان مركزها على مسافة مقدارها ٣سم من كل مستوى المسقط ارسم مسقطى تلك الدائرة .

ارسم الدائرة المذكوره اذا كان مستويها يميل بالزاوية ٤٥° ٯ ٦٠° مع الافقى والرأسى على التوالى .

(٨) ارسم مسقطي هرم منتظم قاعدته مربعة طول ضلعها ٤سم وارتفاعه ٥سم فى الاحوال الآتية

أولا — اذا كان مرتكزا بقاعدته على مستوى يميل بزاوية ٤٥° مع المستوى الافقي ويصنع أحد اضلاع القاعدة ٤٥° مع المستوى الرأسى

ثانيا — اذا كان مرتكزا بقاعدته على مستوى يميل بزاوية ٦٠° مع المستوى الرأسى

ثالثا — اذا كان مرتكزا بقاعدته على مستوى يميل بزاوية ٤٥° مع المستوى الافقى وبزاوية ٦٠° مع الرأسى وكان مركز قاعدته على بعد ٤سم من المستوى الرأسى

(٩) اقطع الهرم المذكور فى المسألة السابقة فى الحالة الاولى بمستو يميل مع المستوى الافقى بزاوية مقدارها ٦٠° ويمر بأحد أركان القاعدة ثم أوجد الشكل الحقيقى للقطاع

(١٠) اقطع الهرم المذكور فى المسألة (٨) الحالة الثانية بمستو عمودى يميل بالزاوية ٧٥° مع المستوى الرأسى ويمر بأحد اركان القاعدة ثم اوجد الشكل الحقيقى للقطاع

(١١) ارسم مسقطي مخروط قائم نصف قطر قاعدته ٢سم وارتفاعه ٤سم وهو مرتكزا بقاعدته على المستوى الافقي ثم اقطعه

أولا - بمستوى عمودى موازى لأحد رواسمه ويمر بمركز القاعدة

ثانيا — « « مائل على أحد رواسمه ولا يقطع القاعدة

ثالثا — بمستوى عمودى يميل على احدى رواسمه ويقطع امتداد راسم آخر فى جهة آخر من الرأس . وفى الاحوال الثلاثة اوجد شكل القطاع واذكر نوعه فيما يختص بالقطاعات المخروطية

(١٢) ارسم المسقطين الرأسى والافقى لمخروط قائم نصف قطر قاعدته ٢ سم وارتفاعه ٥ سم فى الاحوال الثلاثة المذكورة فى نمرة ٨

(١٣) ارسم المسقطين الرأسي والافقى لمنشور سداسى قائم طول ضلع قاعدته ٢ سم وارتفاعه ٤ سم بحيث تميل قاعدته بمقدار ٢٥° ، ٣٠° على الافقى والرأسى على التوالى .

(١٤) ارسم المسقطين الرأسى والافقى لمنشور رباعى قائم قاعدته مربعة طول أحد أضلاعها ٢ سم وارتفاعه ٢ سم

أولا — اذا كانت قاعدته المربعة تميل بمقدار ٣٠° مع الرأسى وعموديه على الافقى

ثانيا — اذا كانت قاعدته المربعة تميل بمقدار ٢٥° مع الافقى وعموديه على الرأسى

ثالثا — اذا كانت قاعدته المربعة تميل بمقدار ٤٥° ، ٥٠° مع الافقى والرأسى على التوالى

رابعا — اذا كان أحد أوجهه المستطيل يميل بالزاويتين ٤٥° ، ٦٠° مع الافقي والرأسى علي التوالى

(١٥) ارسم مسقطى منشور سداسي قائم طول ضلع قاعدته ٢ سم وارتفاعه ٥ سم مرتكزا باحدى قاعدتيه علي المستوى الافقي ثم أفقية بمستو عمودى يميل مع الافقى بزاوية ٤٥° ويقطع كل أوجهه المستطيلة وأوجد الشكل الحقيقى للقطاع

(١٦) ارسم المسقطين الرأسى والافقى لاسطوانة نصف قطر قاعدتها ٢ سم وارتفاعها ٤ سم مرتكزة بأحدى قاعدتيها على المستوى الرأسى واقطعها بمستوى عمودى يميل على المستوى الرأسى بزاوية ٤٥° ويمس احدى قدعدتى الاسطوانة ثم أوجد الشكل الحقيقى للقطاع واذكر من أى نوع من القطاعات

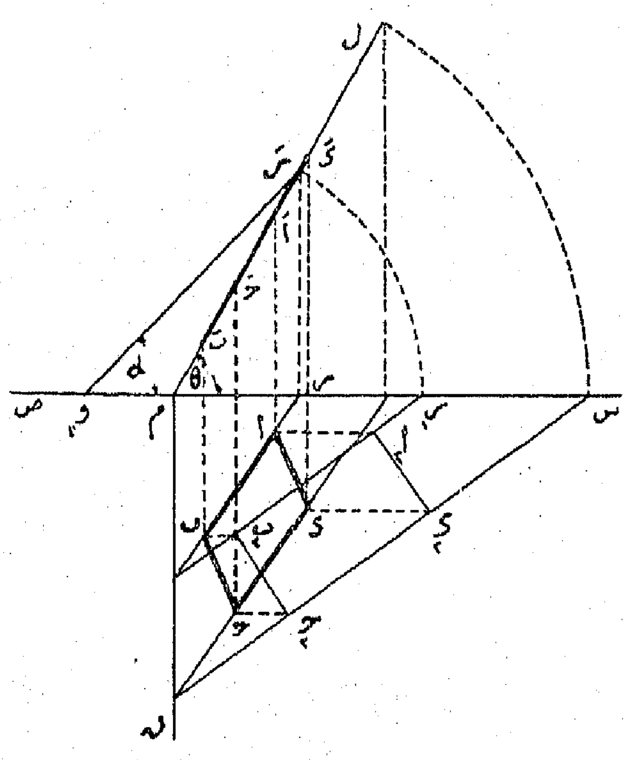
# تابع الفصل الثامن

## فى مساقط الاسطح المستوية والأجسام فى أحوال متنوعة

بند ٣٠ مقدمة : تكلمنا فى الفصل الرابع عن مساقط الاجسام فى أبسط اوضاعها فى الفراغ وفي الفصل الثامن عن دوران المستويات وبها أمكننا ايجاد مساقط الأسطح والاجسام بشروط معينة والآن نتكلم على مساقط الاسطح المستوية والاجسام فى حالات خاصة أصعب مما سبق ذكره فى الفصل الثامن

### فى مساقط الاشكال الهندسية المستوية بشروط متنوعة

**مسألة ٥٤ — تعيين مسقطى مستطيل معلوم ابعاده وموجود فى مستوى عمودى معلوم ميله على أحد مستويى المسقط بشرط أنه يميل أحد أضلاع المستطيل بميل معلوم على أحد مستوى المسقط**



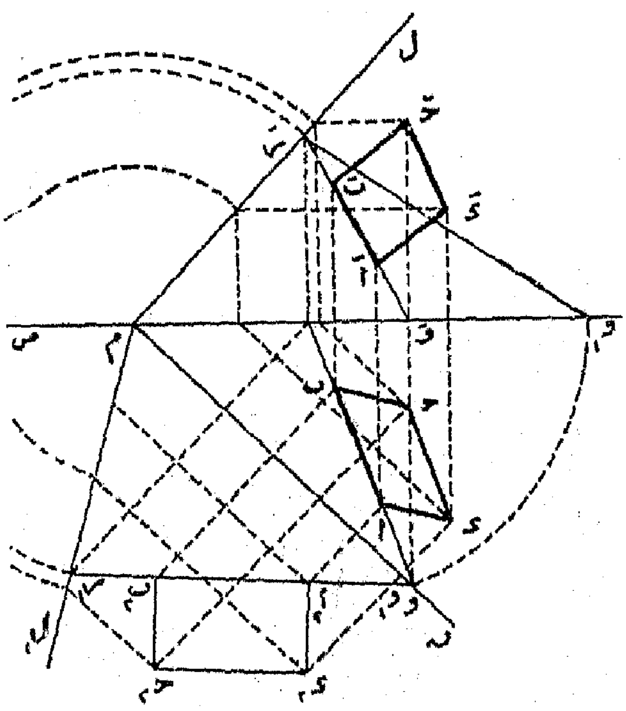
شكل ( ٢٢١ )

المفروض : — المستطيل ضلعيه اب حء معلوم طول كل من ا ب و ب حـ وموجود فى مستوى يميل بالزاوية θ على المستوى الافقى وعمودى على الرأسى ويميل أحد أضلاعه اب بالزاوية ه على المستوى الافقى أيضا

العمل : — نرسم المستوى المحتوى على المستطيل وليكن ل م ه ( شكل ٢٢١ ) بحيث

يميل أثره الرأسى لم بالزاوية θ مع خط الارض ثم من أى نقطة مثل ىَ على اثره الرأسى نرسم الخط ىَ و، يميل بالزاوية ه على خط الارض ونمده حتى يلاقى خط الارض فى و، ثم نركز فى ى المسقط الافقى للنقطة ىَ وبنصف قطر يساوى ىو، ونرسم قوسا يقطع الاثر الافقى م ه فى و ونصل ى و يكون هو المسقط الافقى لخط يميل بالزاوية ه مع المستوى الافقي ( وهى ميل الضلع ا ب عليه ) وموجود فى المستوى ل م ه الذى يميل علي الافقي بالزاوية θ . وبعد ذلك ندير المستوى ل م ه حول أثره الافقى م ه ومعه المستقيم ى و حتى ينطبق على المستوى الافقى بالطريقة المشروحة فى الفصل السابق فينتج أن ى١ و هو وضع المستقيم ى و بعد الانطباق . نأخذ عليه نقطتين ا٢ ، ب٢ بحيث يكون ا٢ ب٢ مساويا لطول ضلع المستطيل ا ب المعلوم ثم نكوّن علي هذا الضلع مستطيلا ا٢ ب٢ حـ٢ ء٢ بالابعاد الحقيقية للمستطيل المعلوم ثم نرجع هذا المستطيل الى وضعه قبل الدوران بفرض أنه موجود فى المستوي ل م ه ينتج المسقطان الرأسى والافقي اَ بَ حـَ ءَ ، ا ب حـ ء المستطيل على التوالى وهو المطلوب

وبنفس الطريقة يمكن رسم مسقطي المستطيل ا ب حـ ء المذكور اذا كان فى مستو اختيارى والشكل ( ٢٢٢ ) يبين مسقطي مستطيل يميل بالزاوية θ ، Φ على المستوى الافقي والرأسى علي التوالى ويميل ضلعه ا ب بالزاوية ه على الافقي وهى نفس الطريقة السابقة



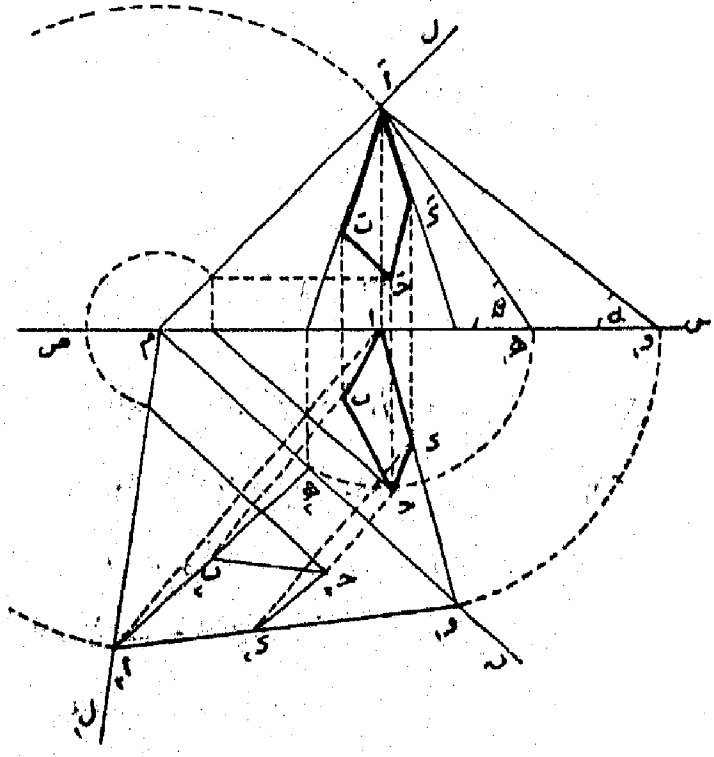
شكل ( ٢٢٢ )

فالمستقيم ى و يميل بالزاوية ه مع الافقي ومسقطيه

مما ـَ و ن ـو ووضعه بعد الانطباق م١و وعليه انتخبت ا٢ ن ب٢ وعلى ا٢ب٢
يسم المستطيل ا٢ب٢حـ٢ء٢ بابعاده الحقيقية ثم ارجع الى مسقطيه اَ بَ حـَ ءَ ن ا ب حـ ء
قبل الدوران وهو المطلوب

**مسألة ٥٥ — تعيين مسقطي شكل مستوى بمعلومية ميله على مستويي المسقط وبمعلومية ميل ضلعين متقاطعين منه على احد مستويي المسقط .**

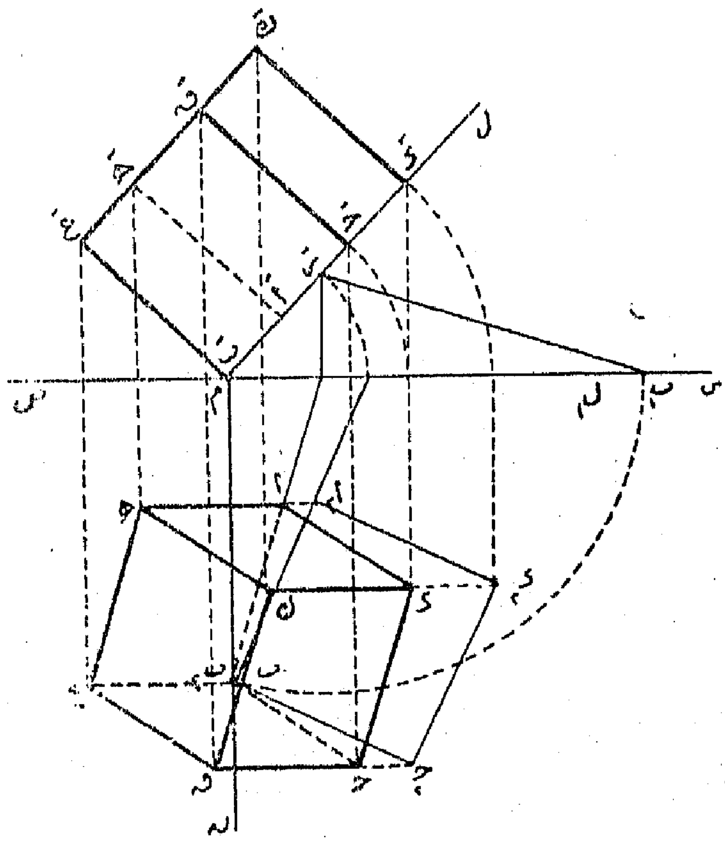
يتبع فى حل هذه المسأله نفس الطريقة السابقة بتعيين مستوى السطح ل م ه اولا شكل ( ٢٢٣ ) ثم مسقطي خطين ا و ا ه يميلان بزاويتي ة ن ه على احد مستويي المسقط على التوالى ويتقاطعان فى نقطة واحدة ولتكن هذه النقط علي الاثر الرأسي للمستوى مثل آ ا بعد ذلك يدار المستوى مع الخطين ا و ن ا ه ويرسم عليهما الشكل وليكن الشكل الرباعي ا٢ ب٢ حـ٢ ء٢ بابعاده الحقيقة ثم نرجع المستوى مع الشكل الى وضعه الاصلى قبل الدوران فينتج المسقطان آ بَ حـَ ءَ ن ا ب حـ ء للشكل وهو المطلوب



شكل ( ٢٢٣ )

## مسألة ٥٦ — تعيين مسقطي جسم منشوري بمعلومية ميل وجه من أوجهه وميل أحد أضلاع ذلك الوجه

المفروض : — مسقطي مكعب معلوم ابعاد احد اوجهه المربعة ومعلوم ميل احد اضلاع هذا الوجه ا ب على المستوى الافقى ومعلوم ميل هذا الوجه على المستوي الافقي شكل (٢٢٤)



شكل (٢٢٤)

العمل : — نعيّن مستوى الوجه المعلوم ميله وليكن ل م ه ثم نعين مسقطى خط فى ذلك المستوى يميل بزاويه ميل ا ب مثل ب ر ثم نعين وضع الخط ب ر بعد انطباق المستوى ل م ه وليكن ب٢ ر٢ ثم نأخذ ب٢ ا٢ على ذلك الخط بحيث يكون ب٢ ا٢ مساويا لاحد اضلاع وجه المكعب ونرسم عليه المربع ا٢ ب٢ ح٢ ء٢ ثم نرجع المستوى ل م ه ومعه الوجه ا٢ ب٢ ح٢ ء٢ ونأتى بمسقطى ذلك الوجه اَ بَ حَ ءَ ن ا ب ح ء ثم من اَ نَ بَ نَ حَ نَ ءَ نرسم اعمدة على الاثر الرأسى ل م ونأخذ

على كل منها مسافات متساوية وتساوى ارتفاع المكعب مثل اَ هَ ٯ سَ عَ ٯ حَ نَ ٯ ءَ كَ ونصل هَ عَ نَ كَ ينتج المسقط الرأسى للوجه المقابل للوجه ا ب حـ ء وينتج المسقط الرأسى للمكعب وهو اَ بَ حَ ءَ هَ عَ نَ كَ ومنه يمكن ايجاد المسقط الافقى للمكعب وهو ا ب حـ ء هـ ع ن ك وهو المطلوب

**مسألة ٥٧ — تعيين مسقطى جسم منشورى بمعلومية ميل خطين متلاقيين فى وجه منه او جهين**

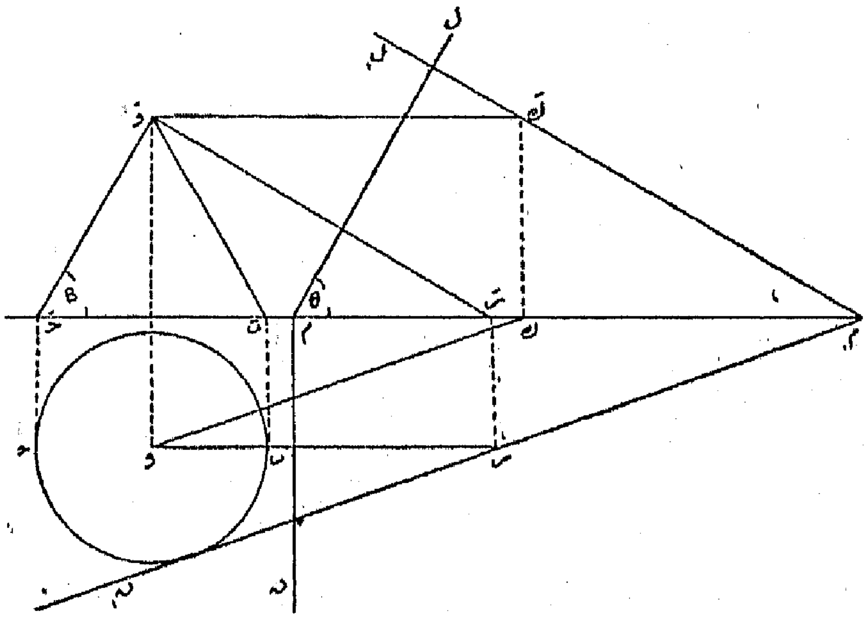
**العمل** — نعيّن المستوى المحتوى على الخطين المتقاطعين بمعلومية ميلهما ثم ندير هذا المستوى ومعه الخطين المذكورين الى ان ينطبق على احد مستويى المسقط ثم نكمل وجه الجسم المحتوى على هذين الخطين كما فى شكل ( ٢٢٣ ) ونجرى العمل تماما كما فى المسألة السابقة شكل ( ٢٢٤ )

**مسألة ٥٨ — تعيين مسقطى جسم منشورى يحتوى على وجهين متعامدين على بعضهما وهذان الوجهان يميلان بزاويتين مختلفتين على احد مستويى المسقط**

**العمل** : ليكن الوجهان المتعامدان على بعضهما هما الوجهان ا ٯ ب ومتقاطعان فى خط مستقيم فنعين اولا مستوى الوجه ا ثم نعين مستويا آخر عموديا على مستوى الوجه ا ويميل بالزاويه المعلومة على المستوى الافقى ومتى عينا كل من مستويى الوجهين المتقاطعين نعين خط تقاطعهما ثم ندير كل من المستوين على حده ومعه خط التقاطع فعند دوران المستوى الذى يحتوى الوجه ا ومعه خط التقاطع الى ان ينطبق على المستوى الافقى مثلا نكمل على هذا الخط الوجه ا بابعاده الحقيقة ثم نرجع المستوى ومعه الوجه ا ثانيا الى اصله فيتعين مسقطا الوجه ا وبنفس الطريقة .وهى دوران المستوى الثانى ومعه خط التقاطع يمكن تعيين مسقطى الوجه ب مع ملاحظة انه يجب ان يكون خط تقاطع الوجهين واحد فى كلا المستويين وبعد ذلك يمكن تعيين باقى مسقطى الجسم . بقى علينا ان نشرح كيفية تعيين مستوى متعامد على مستوى عمودى معلوم ويميل الاول بزاوية معلومة على احد مستويى المسقط وذلك كما فى المسألة ٥٩

مسألة ٥٩ — طريقة تعيين مستوى متعامد على مستوى عمودى معلوم ويميل المستوى الاول بزاوية معلومة على أحد مستويي المسقط

المفروض :— المستوى لمن يميل أثره الرأسي بزاوية θ مع المستوى الافقي وأثره الافقي عمودى على المستوى الرأسى والمطلوب تعين مستوى آخر عمودى على المستوى لمن ويميل بزاوية β مع المستوى الافقى



(شكل ٢٢٥)

العمل :— نعين أولا المستوى ل م ن وفيه ل م الاثر الرأسي يميل بالزاوية θ على خط الارض ى م ن أثره الافقي عمودى على خط الارض ( شكل ٢٢٥ ) ثم ننتخب أى نقطة فى الفراغ مثل و وليكن مسقطاها وَ ى و ومن وَ نرسم مسقط رأسى لمخروط يميل رأسه بالزاوية β مع خط الارض ومنطبقا بقاعدته علي المستوى الافقي ونرسم من و المسقط الافقى لها دائرة وهى المسقط الافقى للمخروط شكل (٢٢٥) فاذا رسمنا من وَ عمودا علي الاثر الرأسى ل م مثل العمود وَ رَ ومددناه ليقابل خط الارض فى رَ لكان وَ رَ مسقط رأسى لخط عمودى على المستوى لمن مسقطه الافقى و ر عموديا علي الأثر الافقي م ن من و

وحيث أن هذا المستقيم و ر عمودا علي المستوى ل م ن فيكون موجودا فى

المستوى المطلوب وتكون نقطة ر على أثره الافقي ولا بد ان المستوى المطلوب يكون مماسا للمخروط وَو فاذا رسمنا من ر مماسا للمسقط الافقى المخروط مثل ر ه١ لكان ر ه١ هو الاثر الافقى المستوى المطلوب ويمكن ايجاد الاثر الرأسى برسم خطا موازيا للمستقيم ر ه١ من النقطة و ونمده حتى يقابل خط الارض فى ك فيكون و ك هو مسقط افقى لخط افقى فى المستوى المطلوب فاذا اقمنا من ك عمودا على خط الارض ليقابل الخط الافقي المرسوم من وَ فى كَ لكانت كَ موجودة على الاثر الرأسى للمستوى المطلوب لأنها الاثر الرأسى للخط الافقي و ك فاذا رسمنا من كَ خطا موازيا للخط رَ وَ مثل كَ ل١ يكون كَ ل١ هو الاثر الرأسى للمستوى المطلوب وهو المطلوب

## تمرينات (٨)

### على مساقط الاسطح والاجسام فى أحوال خاصة متنوعة

(١) ارسم مسقطي مثلث متساوى الاضلاع طول أحد أضلاعه ٥ سم عندما يميل مستويه بزاوية ٤٥° ويميل أحد أضلاعه بزاوية ٣٠° مع الافقى واحدى رؤوسه موجودة على المستوى الافقي

(٢) ارسم مسقطى مربع طول ضلعه ٥ سم بحيث يميل مستوى المربع ٤٥° مع الافقى ٦ ٦٠° مع الرأسى ويميل أحد قطرى المربع بزاوية ٣٠° مع المستوى الافقى

(٣) الاثر الرأسى لمستو يميل بزاوية ٤٥° مع خط الارض وأثره الافقى يميل بزاوية ٥٠° مع خط الارض ارسم مسقطى مسدس فى هذا المستوى بحيث يميل أحد أضلاع ذلك المسدس بزاوية ٣٠° مع المستوى الافقي

(٤) اب حـ مثلث متساوى الاضلاع طول ضلعه ٥سم ونقطة ا منه على المستوى الافقي ونقطة ب تعلو بمقدار ٢ سم ٦ حـ تعلو بمقدار ٣ سم عن المستوى الافقي ارسم مسقطى ذلك المثلث على خط أرض مواز الى ا ب

(٥) ارسم مسقطي مربع ا ب حـ ى طول ضلعه ٤ سم اذا كان مركزه يعلو بمقدار ٤ سم ٦ ونقطتى ا ٦ ب منه تعلوان بمقدار ٣ سم ٦ ٥ر١سم على التوالى عن المستوى الافقى

(٦) ارسم مسقطي هرم خماسي قائم قاعدته مخمس منتظم طول ضلعه ٢ سم بحيث تميل قاعدته بالزاويتين ٥٥° ٦ ٦٠° مع الأفقى والرأسى على التوالى ويميل أحد اضلاع قاعدته بزاوية ٣٠° مع الافقى وارتفاعه ٥ سم

(٧) منشور قائم طوله ٦ سم وكل من قاعدتيه المتوازيتين مسدس منتظم طول ضلعه ٥ر٢ سم ٦ ا ب هو ضلع من أضلاع قاعدته ٦ ب هـ هو احد أحرف أوجهه الجانبية ارسم مسقطى ذلك المنشور بفرض أن الثلاث نقط ا ٦ ب ٦ هـ تعلو بمقدار ٤ر٠ ٦ ٢ ٦ ٥ سم عن المستوى الافقى على التوالى

# الفصل التاسع

## قطاعات الاجسام

**مقدمة :**

٣٠ — الغرض من هـذا الباب هو معرفه الطرق العماية اللازمة لبيان انواع سطوح الأجسام المستعملة فى الأعمال الفنية وكيفية قطع تلك الأجسام واظهار تفاصيلها الداخلة بمساعدة القواعد الاساسيه المذكورة فى البنود السابقة . وحيث ان الاجسام الاكثر استعمالا فى الاعمال الفنية هى الاجسام الهندسية فلنقتصر على شرح التعاريف والقواعد الخاصة بها .

**تعاريف :**

السطح الهندسى : هو المحـل الهندسى لسائر الأوضاع التى يشغلها خط يتحرك فى الفراغ بشروط معينة كاتكائه على خط آخر وتوازيه لنفسه أو مروره بنقطة معينة أو دورانه حول مستقيم ثابت

والخط المتحرك هنا يسمي براسم السطح المتولد عنه والخط المتكيء عليه يسمى بداله والمستقيم الثابت يسمى بمحوره .

فاذا كان الراسم خطا مستقيما والدال خطا مستقيما وكان كل من الراسم والدال فى مستو واحد سمى السطح المتولد عنهما **سطحا مستويا**

واذا كان الراسم خطا مستقيما والدال خطا منكسرا ومستويا وليس فى مستوى واحد مع الراسم سمى السطح المتولد عنهما **سطحا منكسرا**

واذا كان كل من الراسم والدال خطا منحنيا وليسا فى مستو واحد سمي السطح المتولد عنهما **سطحا منحنيا**

واذا كان الراسم خطا مستقيما والدال منحنيا وليس فى مستوى الراسم سمى السطح المتولد عنهما **سطحا مركبا** .

اما اذا دار الراسم دورة كاملة حول محور ثابت مع المحافظة على ابعاد نقطة عن المحور المذكور سمى السطح المتولد عنه **سطحا تحركيا** مهما كان نوع الراسم بشرط عدم تعامده على محوره . ويتميز هذا السطح بانه اذا قطع بمستو عمودى على محوره كان المقطع محيط دائرة ومثال ذلك السطح الاسطوانى والمخروطي والكروى ومجسم القطع الناقص أو الزائد التحركى والسطح الحلقي .

ومن هذا يتضح أن السطوح الهندسية :—

اما ان تكون **مستوية** وهذه لا تشغل حيزا من الفراغ

واما أن تكون **منكسرة** وهى التى اذا احاطت حيزا من الفراغ وملىء هذا الحيز باكمله بأى مادة تكونت اجسام منشورية او هرمية

واما ان تكون اسطح **منحنية** أو **مركبة** ويدخل ضمنها الأسطح التحركية وهى التى اذا احاطت حيزا من الفراغ وملىء هذا الحيز بأكمله بأى مادة تكونت اجسام اسطوانية او مخروطية او كروية او مجسمات القطع الناقص او الزائد التحركي

فتسمى الاسطح والاجسام بحسب أشكالها وعند الكلام على الاجسام واسطحها قد يطلق فى الغالب على كل من الجسم أو سطحه اسم واحد فمثلا كلمة كرة او اسطوانة يقصد بها اما جسم او سطح الكرة او الاسطوانة وعند الكلام على تقاطع اسطوانتين ببعضها فقد يقصد به الكلام على شكل منحنى تقاطع سطحى تلك الاسطوانتين فقط لا جسميها .

**بند ٣١ — القطاعات :**

قد يتعذر فى احوال كثيرة معرفة تفاصيل وافية عن تكوين الاجسام من الداخل كاجزاء القطع الميكانيكية او المعمارية بمعلومية مساقط اسطحها من الخارج فقط ولذا يكون من الضرورى اظهار اشكالها من الداخل فنتصور قطع تلك الاجسام

بمستويات عمودية او اختيارية الى عـدة أجزاء عند مواضع معينة فيها واسقاط تلك الاجزاء كل على حده ء

وقد يقصدمن قطع الجسم أحيانا زيادةايضاح ابعاده أو سهولة كتابتها على الرسم اذا كان ذلك الجسم بسيطا ولو ان ذلك ليس ضروريا لمعرفة تسكوينه من الداخل

فاذا كان الجزء المقطوع من الجسم تحت أو خلف المستوى القاطع فان مسقطه علي احد مستوي المسقط يسمى بالقطاع الأفقي او القطاع الرأسى لذلك الجزء على التوالى وقد يطلق على كليهما كلمة قطاع فقط فى الاشكال المعمارية والميكانيكية

ويميزمسقط القطاع فى الرسومات الهندسية بطرق مختلفة أهمها تهشيره بخطوط وترية خفيفة على ابعاد متساوية وقريبة من بعضها

واذا اريد بيان الشكل الحقيقي للقطاع فلا بد من اسقاطه على مستو يوازى المستوى القاطع . أو بقائه على نفس المستوى القاطع ثم دوران هذا المستوى حتى ينطبق على احد مستويى المسقط

فاذا كان المستوى القاطع متعامدا على كل من مستويي المسقط فيكفى اسقاط القطاع على المستوى الجانبى ودورانه حتى ينطبق على احد مستويى المسقط وهـذا يبين شكله الحقيقى

واذا كان المستوى القاطع عموديا على المستوى الرأسى وموازيا للافقى فيكفى اسقاطه على المستوى الافقى لبيان حقيقة شكله

واذا كان المستوى القاطع عموديا على الأفقي وموازيا للرأسي يكفي اسقاطه على المستوى الرأسي لبيان شكله الحقيقي

واذا كان المستوى القاطع عموديا علي الرأسى ومائلا على الافقي يسقط القطاع على مستو يوازى المستوى القاطع أو على نفس المستوى القاطع اى على خط ارض يوازى الاثر الرأسى للمستوى القاطع أو منطبقا عليه فيظهر بشكله الحقيقى

واذا كان المستوى القاطع عموديا على الافقى ومائلا على الرأسى يسقط القطاع على مستو يوازى الاثر الافقى للمستوى القاطع أو منطبقا عليه فيظهر بابعاده الحقيقية

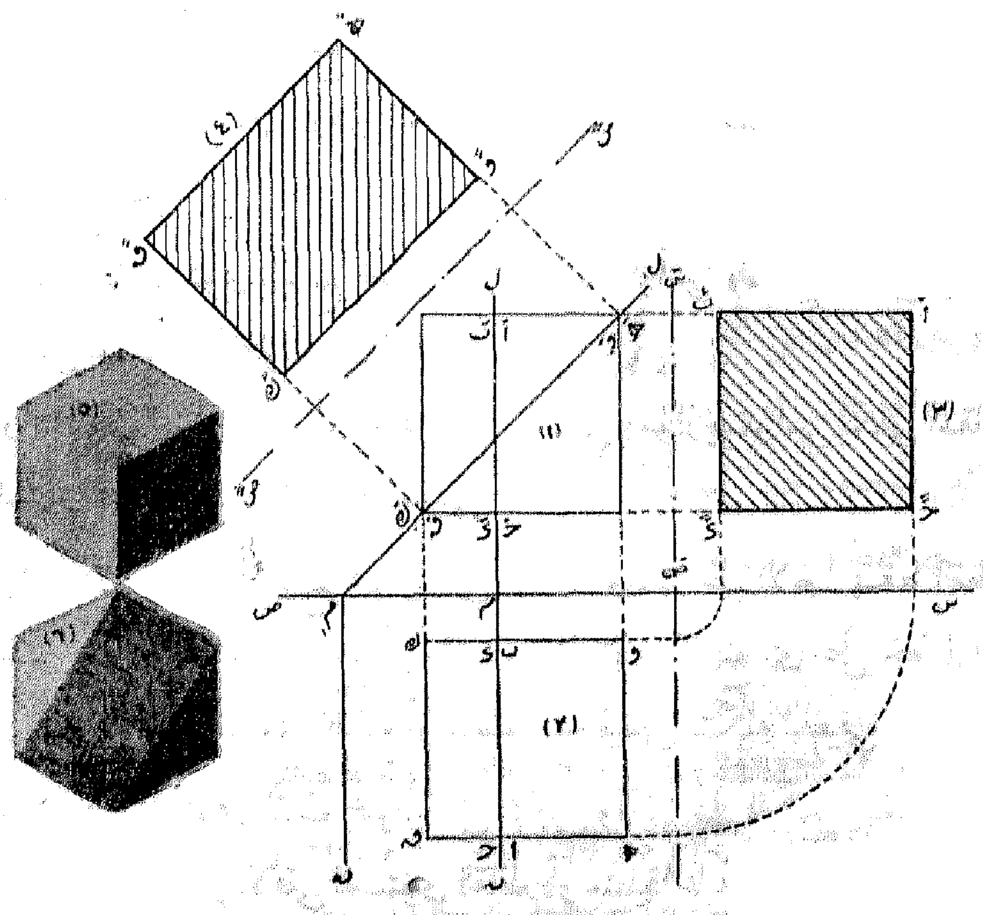
اما اذا كان المستوى القاطع اختياريا فلبيان شكل القطاع الحقيقى يسقط القطاع

أولا على كل من مستوى المسقط ويؤتى بمسقطيه الرأسى والافقى وبعد هذا تتحول المسألة الى ايجاد الشكل الحقيقى لسطح معلوم مسقطيه والمستوى المحتوى عليه فيدار المستوى القاطع مع القطاع حول احد أثريه الى ان ينطبق على احد مستوى المسقط كما سبق الكلام عليه فى الفصل السابق وسنشرح فيما يلى طريقة قطع الأجسام وكيفية ايجاد مساقط قطاعاتها والأشكال الحقيقية لتلك القطاعات وسنبدأ أولا الاجسام ذات الاسطح المستوية وهي المنشورية والهرمية ثم الاجسام التحركية وهى المخروطية والاسطوانية والكروية فالاجسام المركبة

بند ٣٢ — قطاعات الاجسام المنشورية والهرمية :

المكعب : —

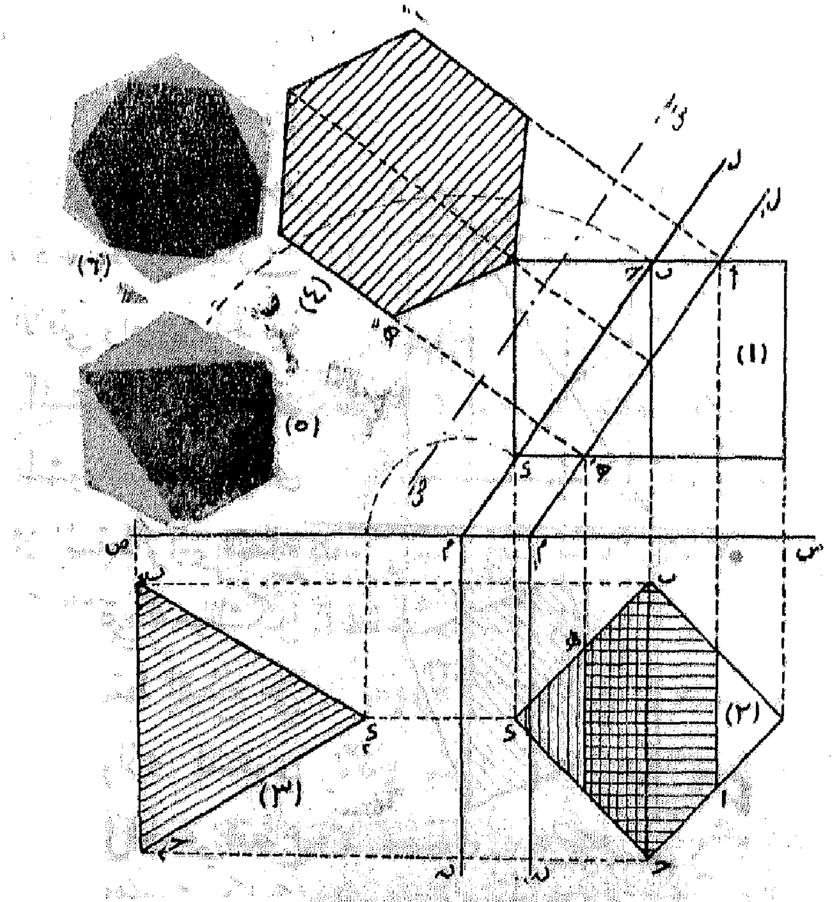
شكل (٢٢٧) يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لمكعب وقد قطع هذا المكعب بمستويين : —




( شكل ٢٢٧ )

اولا — بمستوى عمودى على خط الارض ل م ن فكان المسقط الرأسى للقطاع هو اَ بَ هـَ ءَ والافقى له هو ا ب هـ ء ثم اسقط ذلك القطاع على المستوى الجانبى سَ صَ الموازى المستوى القاطع ل م ن فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٣) وهو المربع اً بً هـً ءً

ثانيا — بمستوى عمودى على الرأسى ومائل الى الافقى ل١م١ن١ ويحتوى على قطرى وجهين متوازيين من أوجه المكعب فكان المسقط الرأسى له هو هَ وَ كَ نَ والافقى له هو هـ و ك ن ثم اسقط القطاع على مستوى سً صً موازى للمستوى القاطع ل١م١ن١ فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٤) وهو المستطيل هً وً كً نً اما طريقة اسقاط القطاع على مستوى يوازى المستوى القاطع فهى كما سبق بأخذ ابعاده عن كل من سَ صَ و سً صً تساوى ابعاد نقطة فى المسقط الافقى عن س ص وقد رسم منظور المكعب وهو غير مقطوع فى (٥) ورسم وهو مقطوع بالمستوى الثانى فى (٦) وشكل (٢٢٨)




شكل (٢٢٨)

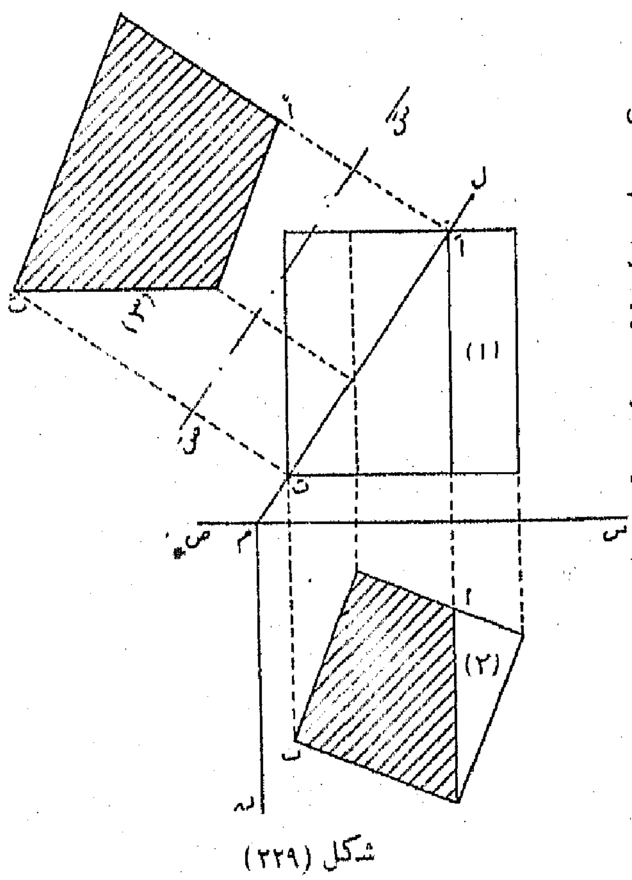
يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لمكعب فى وضع بحيث ان اوجهه الجانبية تميل بزاوية ٤٥ مع الرأسى . وقد قطع هذا المكعب : —

أولا — بمستو عمودى على الرأسى ومائل الى الافقى ل م ﻫ ويمر بثلاث رؤوس من رؤوس المكعب وهي ب ى ح ى ء فكان المسقط الرأسى للقطاع هو بَ حَ ءَ والأفقى له هو ب ﻫ ء ثم ادرنا المستوى القاطع ومعه القطاع حتى انطبق على المستوى الافقى فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٣) وهو المثلث ب٢ ح٢ ء٢ والشكل (٥) يبين منظورا المكعب وهو مقطوع فى هذه الحالة

ثانيا — بمستوى عمودى ل١ م١ ﻫ١ ويمر بمركز المكعب فكان المسقط الرأسى للقطاع هو الخط اَ هَ والافقى له وهو الشكل السداسى ا ﻫ ثم اسقط القطاع على مستوى سَ صَ يوازى المستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقي للقطاع فى (٤) وهو المسدس اً هً والمنظور (٦) يبين المكعب وهو مقطوع في هذه الحالة

المنشور : —

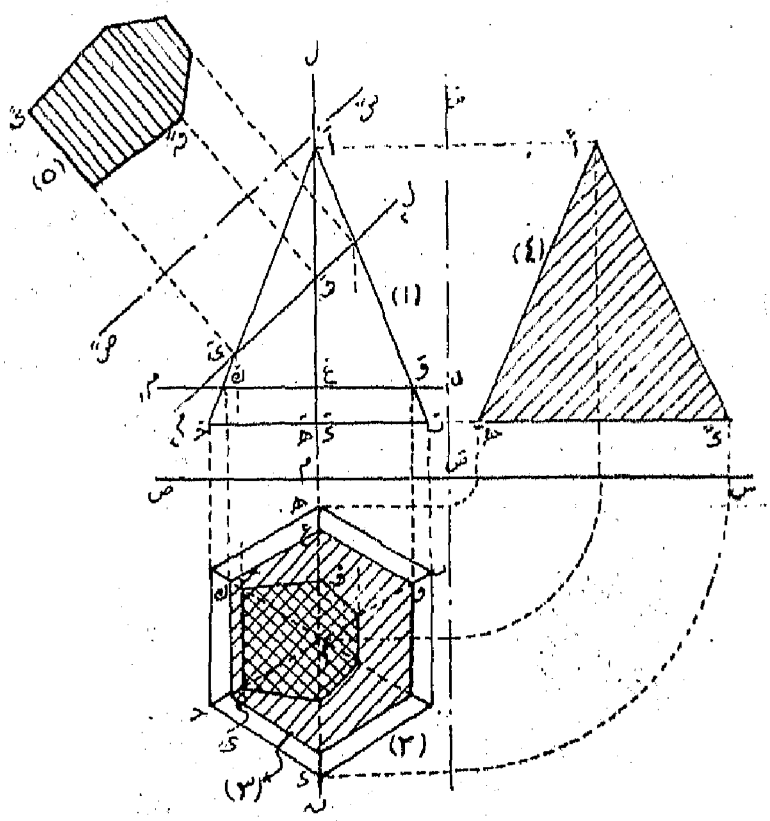
شكل (٢٢٩) يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لمنشور رباعى قائم قاعدتاه موازيتان المستوى الافقى وأوجهه الجانبية مائلة علي المستوى الرأسى وقد قطع ذلك المنشور بمستوى عمودى ل م ﻫ فكان المسقط الرأسى للقطاع هو الخط اَ بَ والافقي له هو الشكل الرباعى ا ب ثم اسقط القطاع علي مستوى سَ صَ يوازى المستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقي للقطاع فى (٣) وهو شبه المنحرف اً بً



شكل (٢٢٩)

الهرم :

شكل (٢٣٠) يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لهرم سداسى قائم قاعدته موازية المستوى الافقى وقطر من اقطار القاعدة عمودى على المستوى الرأسى وقد قطع ذلك الهرم : —



شكل (٢٣٠)

أولا — بمستو عمودى على خط الارض ل م ن فكان المسقط الرأسى للقطاع هو الخط أَ ءَ هَ والافقي له هو الخط اهء ثم اسقط القطاع على المستوى الجانبى سَ سَ الموازى للمستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقي للقطاع فى (٤) وهو المثلث أً ءً هً

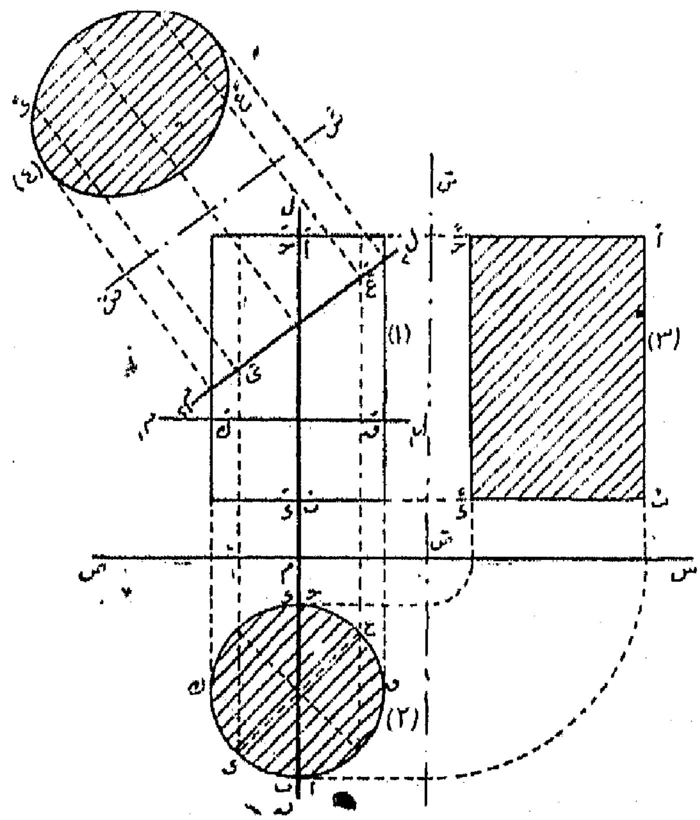
ثانيا — بمستو افقي ل١م١ فكان المسقط الرأسى للقطاع هو وَ عَ كَ والمسقط الافقى له هو المسدس المهشر و ع ك (٣) وهو الشكل الحقيقى للقطاع .

ثالثا — بمستو عمودى على الرأسى ومائل على الافقى ل٢م٢ فكان المسقط الرأسى للقطاع واقع على الخط ل٢م٢ والمسقط الافقى له هو الشكل السداسى المهشر تهشيرا مضاعفا ن ى ثم اسقط القطاع على خط ارض سً سً مواز للمستوى القاطع فنتج الشكل الحقيقي القطاع وهو الشكل السداسى نً ىً فى (٥)

## بند (٣٣) : قطاعات الاجسام الهندسية

### الاسطوانة :

الشكل (٢٣١) يبين المسقط الرأسى (١) والافقى (٢) لاسطوانة وقد قطعت


شكل (٢٣١)

أولا — بمستو عمودى على خط الارض ل م ن فكان المسقط الرأسى للقطاع هو الخط اَ بَ حَ ىَ والافقى هو الخط ا ب حـ ى وقد اسقط القطاع على مستو جانبى سَ صَ فنتج الشكل الحقيقى للقطاع فى (٣) وهو المستطيل اً بً حً ىً

ثانيا — بمستو افقى $ل_١ م_١$ فكان القطاع الرأسى هو خط مستقيم نَ كَ والافقى هو الدائرة ن ك وهو الشكل الحقيقى للقطاع .

ثالثا — بمستو عمودى على الرأسى ومائل على الافقى $ل_٢ م_٢$ فكان المسقط الرأسى للقطاع هو عَ ىَ والافقي هو الدائرة ع ى ثم اسقط القطاع على مستو يوازى المستوى القاطع فنتج الشكل عً ىً وهو قطع ناقص

### المخروط :

تكلمنا فى الفصل السابق عن قطاعات المخروط وهي : —

أولا — قطاع دائرى اذا كان المستوى القاطع عموديا على محور المخروط القائم

ثانيا — قطاع منحنى قطع ناقص اذا كان المستوى القاطع يقطع جميع رواسم المخروط فى جهة واحدة من الرأس ومائلا على على محوره شكل (٢٠٨) صفحة ١٣٥

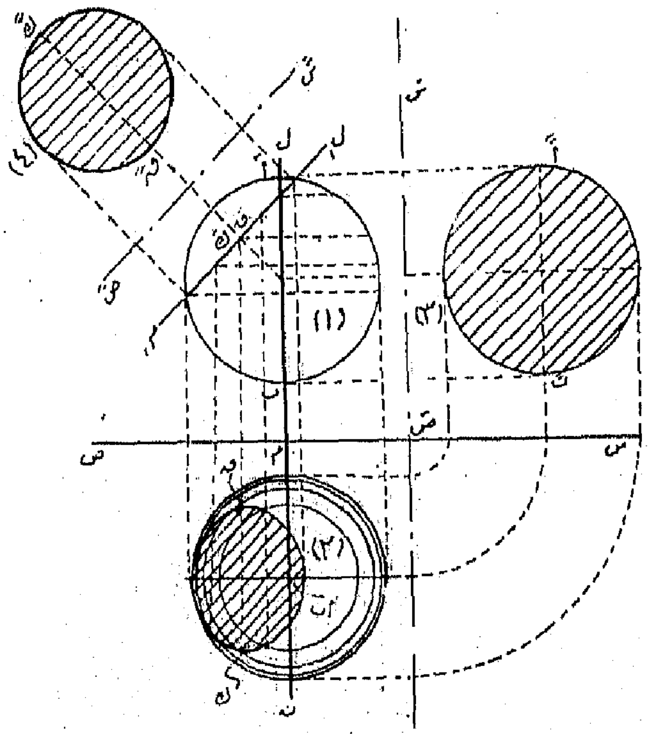
ثالثا — قطاع منحنى قطع مكافىء اذا كان المستوى القاطع موازيا لأحد رواسم المخروط ويقطع قاعدة المخروط شكل (٢٠٩) صفحة ١٣٧

رابعا — قطاع منحنى قطع زائد اذا كان المستوى القاطع موازيا لراسمين من رواسم المخروط فيقطع سطح المخروط وامتداده من جهة الرأس فى منحنيين فى جهتين مختلفتين منها شكل (٢١٠) صفحة (١٣٨) وكل هذه القطاعات الاربعة يطلق عليها القطاعات المخروطية

الكرة

شكل (٢٣٢) يبين المسقطين الرأسى (١) والافقى (٢) لكرة وقد قطعت : —

أولا — بمستو عمودى على خط الارض ل م ن ع بمركزها فكان المسقط الرأسى الخط اَ بَ والأفقى الخط ا ب ثم اسقط القطاع



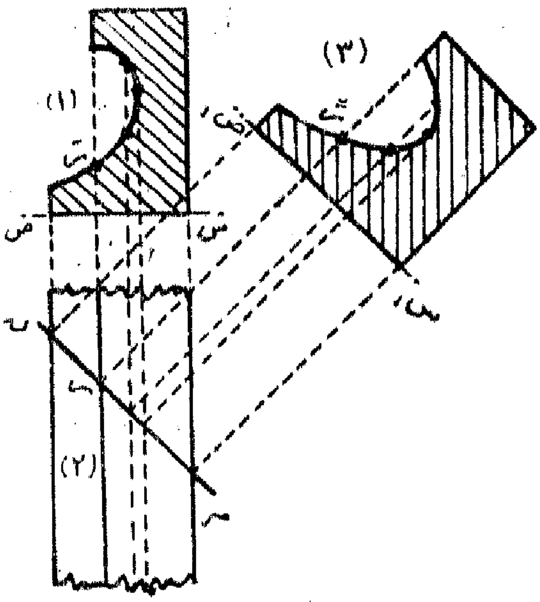
( شكل ٢٣٢ )

على مستو جانبى سَ سَ فنتج الشكل الحقيقى اً بً للقطاع وهو دائرة قطرها يساوى قطر الكرة وهو اكبر قطاعات الكرة

ثانيا — بمستو عمودى على الرأسى ومائل على الأفقى ل١ م١ ولا يمر بمركز الكرة فكان المسقط الرأسى هو المستقيم كَ نَ والأفقى قطع ناقص ك ن

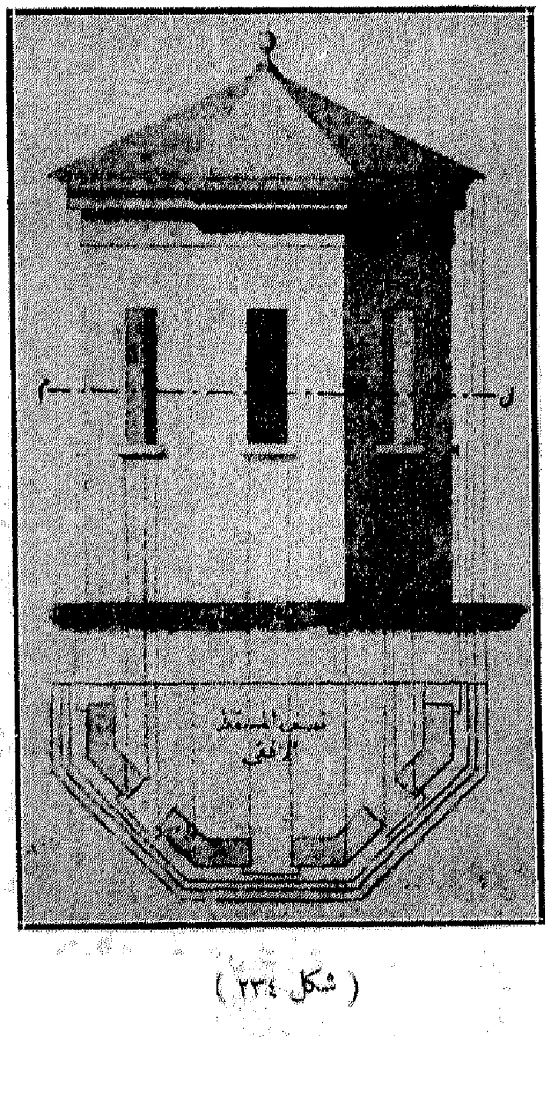
اما نقط المسقط الافقى هذا فقد وجدت بواسطة قطع الكرة بمستويات أفقية على ارتفاعات مختلفة فالاثرات الرأسية لتلك القطاعات تقطع الاثر الرأسى المستوى القاطع فى نقط مثل نَ كَ والمساقط الافقية لتلك المستويات هى دوائر ظاهرة على المسقط الافقى للكرة فكل نقطة مثل نَ لها مسقطان أفقيان على المسقط الافقي للقطاع عند ن وعلى ذلك ينتج المسقط الافقي للقطاع وهو ن ك

ثم اسقط القطاع على مستوي س ً ص ً يوازى ل١م١ فنتج الشكل الحقيقي للقطاع وهو الدائرة ن ً ك ً

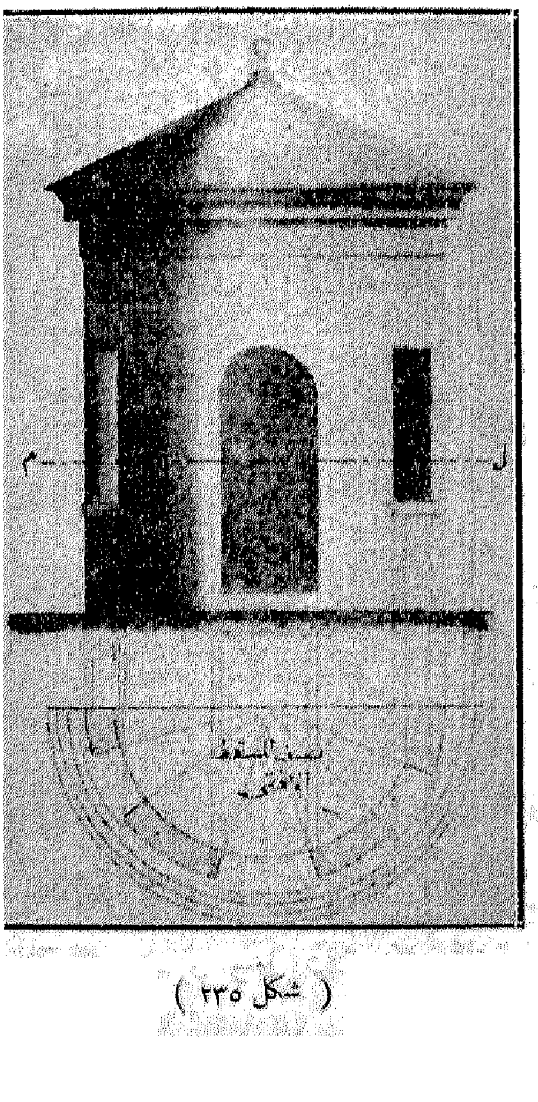


( شكل ٢٣٣ )

بند (٣٤) قطاعات الاجسام المركبة
شكل (٢٣٣) يبين المسقط الرأسى (١) والافقى (٢) لقالب مستعمل كحلية فى المبانى وقد قطع بالمستوى م ن واسقط القطاع على س١ ص١ يوازى المستوى القاطع م ن وأخذت ابعاده كابعاد المسقط الرأسى (١) عن خط الارض س ص فنتج الشكل الحقيقي لقطاع القالب (٣)



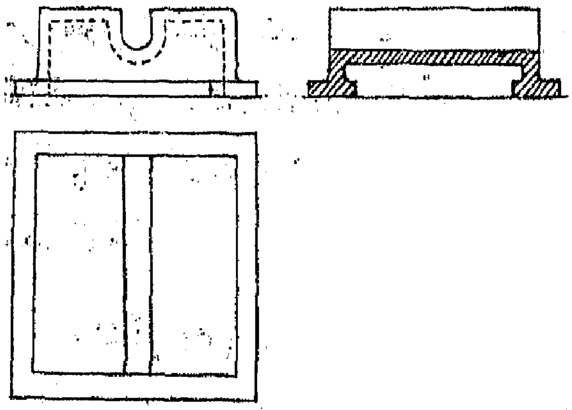
( شكل ٢٣٤ )



( شكل ٢٣٥ )

وشكل (٢٣٤) يبيّن المسقط الرأسى (١) ونصف المسقط الافقى (٢) لمكشك مدس مقطوع بمستو افقى ل م . (هنا قد ظللنا اوجه الكشك لسهولة تصوره)

وشكل (٢٣٥) يبين المقسط الرأسى ونصف المسقط الافقى كذلك لمكشك دائرى مقطوع بمستو أفقى ل م

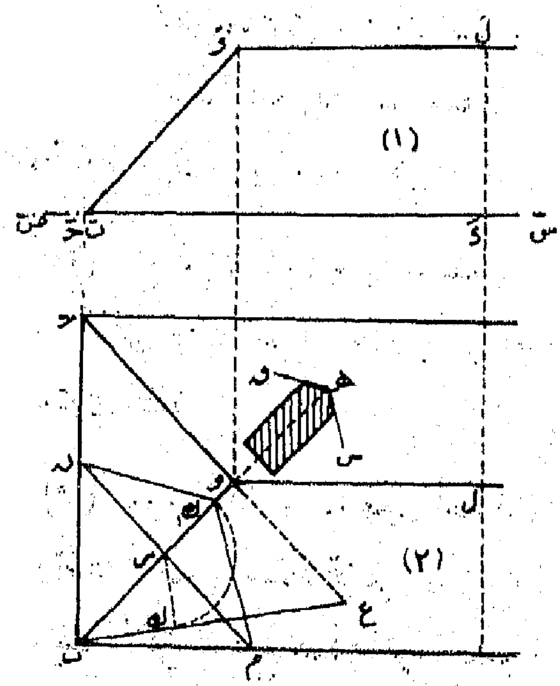


شكل (٢٣٦)

وشكل (٢٣٦) يبيّن المسقط الرأسى والافقى لصمام منزاق بسيط وهى قطعة من آلة بخارية ويبين المسقط الجانبى لقطاع فى ذلك الصمام وهو مقطوع بمستو عمودى على كل من مستوى المسقط وهو شكل القطاع الحقيقى

ملاحظة : فى الاشكال الثلاثة الاخيرة يظهر جليا للطالب فائدة قطع الاجسام وعمل القطاعات فهو لاظهار اسماك تلك الاجسام وسهولة وضع ابعادها على الرسم

بند (٣٥) المثال التالى تطبيق عملى على استعمال القطاعات فى المنشئات الخشبية :




(شكل ٢٣٧) .

فشكل (٢٣٧) يبين المسقط الرأسى (١) والافقى (٢) لسقف جمالونى وفيه نقطة و وَ هي تلاقى ثلاث سطوح مائلة مع بعضها وليكن المطلوب زاوية ميل السطح و ب ح مع السطح ل و ب

لذلك نقطع السطحين المذكورين بمستو عمودى فالخط و ب هو المسقط الافقى لخط تقاطع السطحين والخط م ر ه مرسوم عمود على خط

التقاطع هـذا فى أى نقطة عليه مثل ر فيكون هو الاثر الافقى المستوى القاطع ى ب هـ ى د هـ هى الاثران الافقيان للسطحين المائلين المطلوب ايجاد الزاوية بينهما فاذا مددنا هـ و على استقامته من جهة و وأخذنا عليه بعدا مثل و ع مساويا لارتفاع النقطة و عن المستوى الافقى وهو ارتفاع النقطة وَ عن دَ بَ ووصلنا ع ب يكون ع ب هو الطول الحقيقى لخط التقاطع ثمن ر نقيم العمود ر ك على ع ب يكون هو ارتفاع النقطة ر عن المستوى الافقى فاذا أخذنا على ر و البعد ر ك١ مساويا الى ر ك ووصلنا ك١ م ى ك١ ن تكون الزاوية م ك١ ن الزاوية بين السطحين و حـ ب ى ل و ب د وهو المطلوب

والشكل (٣) يبين قطاع الساند بين السطحين وفيه الخط هـ ن يوازى ك١ ن ى هـ س يوازى ك١ م وهـذا مما يساعد النجار على قطع الساند المذكور عند التركيب

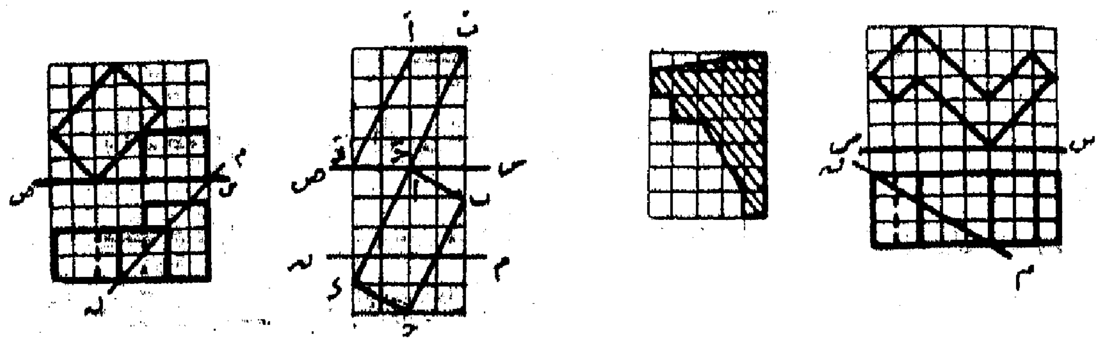
## تمرينات (٩)

(١) الشكل (٢٣٨) يبين المسقطين الرأسى والافقى لمنشورين قطعا بمستو عمودى أثره الافقى م ن والمطلوب رسم مسقطي ذلك القطاع ثم اسقاط القطاع المذكور على خط ارض جديد يوازى م ن لايجاد شكله الحقيقى .

(٢) الشكل (٢٤١) يبين المسقطين الرأسى والافقى لجسم قطع بمستو عمودى اثره الافقي م ن ارسم المسقط الرأسى للجزء الاكبر من الجسم على مستو يوازى المستوى القاطع

(٣) هرم قاعدته مربعة طول أحد اضلاعها ٥ سم موضوع على المستوى الافقى وارتفاعه ٧ سم والمسقط الافقى لرأسه واقع على منتصف أحد أضلاع القاعدة فى المسقط الافقى . قطع هـذا الهرم بمستو افقى يعلو عن القاعدة بمقدار ٢٫٥ س م الى جزءين . ارسم المسقط الافقى للجزء السفلى لذلك الهرم

(٤) هرم سداسى قائم طول ضلع قاعدته ٥ر٢ سم وارتفاعه ٥ سم قطع بمستوى يحتوى على أحد احرف القاعدة وعموديا على الوجه المقابل لذلك الحرف والمطلوب رسم الشكل الحقيقى للقطاع



٢٣٨ ٢٣٩ ٢٤٠ ٢٤١

(٥) شكل (٢٣٩) يبين المسقطين الرأسى والافقى آ ب حـ ء ، ا ب حـ ء لاحد الاوجه الجانبية لمنشور سداسى قائم ، اب ، حـ ء اضلاع فى قاعدتيه على التوالى كمّل مسقطى المنشور المذكور وبيّن على المسقط الرأسى مسقط قطاع فى المنشور بمستو رأسى اثره الافقى م ه

(٦) قالبي حلية قطاع كل منهما كالمبين بشكل (٢٤٠) الصقا على حائط رأسى ووضع أحدهما افقي والآخر يميل بزاوية ٣٠° مع الافقى وقد اتصلا ببعضهما عند وصلة والمطلوب تعيين الشكل الحقيقى للقطاع عند تلك الوصلة

(٧) مخروط قطر قاعدته ٤ سم وارتفاعه ٥ سم قطع بمستو عمودى يميل على الافقى بزاوية ٤٥° ومماسا لقاعدة المخروط والمطلوب رسم المسقط الافقي للقطاع وايجاد الشكل الحقيقى له

# الفصل العاشر

## فى الانفرادات

بند (٣٦) : انفراد السطح هو بسطه بابعاده الحقيقية على سطح مستو
والسطوح من حيث الانفراد على نوعين : —

سطوح قابلة للانفراد وهى ما امكن بسطها على السطح المستوى بدون حصول أدنى تمزيق ولا انثناء فى أجزائها كالسطوح المنشورية والهرمية والاسطوانية والمخروطية

وسطوح غير قابلة للانفراد ويطلق عليها السطوح الشمالية وهى لا يمكن بسطها على السطح المستوى بدون حصول التمزيق والانثناء فى أجزائها ومنها السطح الكروى والقبة الدائرية ولكن بتقسيم مثل تلك الاسطح الى قطع يمكن بالتقريب ايجاد انفراد كل قطعة منها كما سنبين بعد .

ويقصد عادة بالانفرادات بسط السطوح الجانبية للاجسام دون سواها فقد لا يدخل فى ذلك انفراد قواعد تلك الاجسام وسنتكلم فيما يلى عن انفراد السطوح بأنواعها قابلة للانفراد وغير قابلة له بعد الكلام على كيفية تكوين كل منها

بند (٣٧) : السطوح القابلة للانفراد :

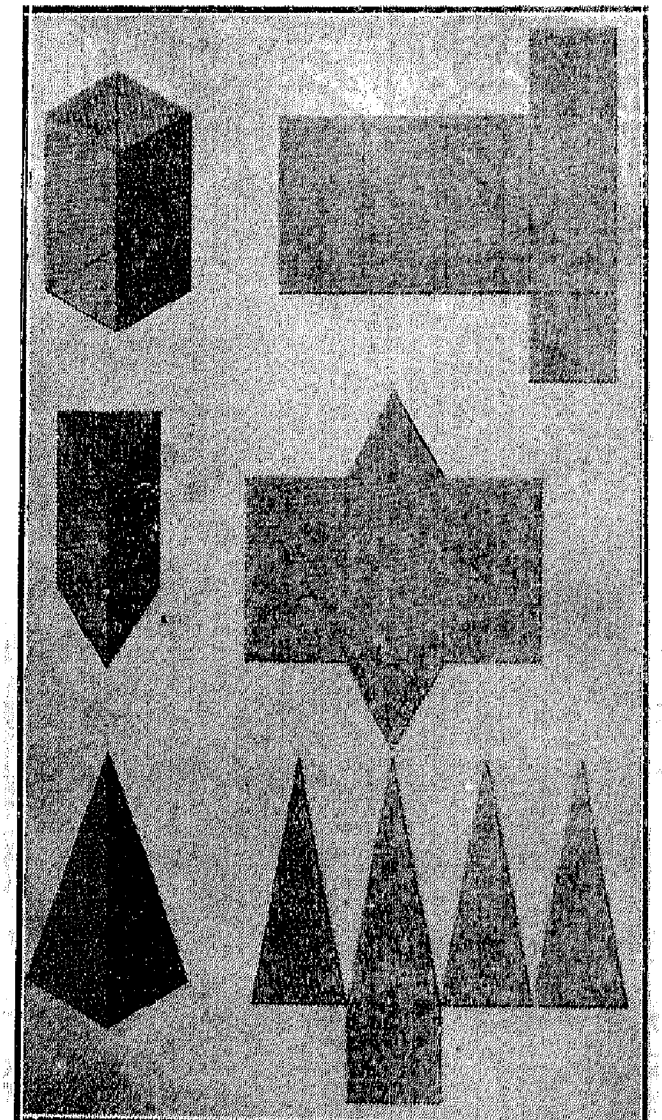
السطح المنشورى : هو نوع من السطوح المنكسرة يتولد عن تحرك الراسم المستقيم بالتوازى لنفسه حالة كونه متكئا على خط منكسر مستو غير موجود فى مستويه

والاكثر استعمالا من هذا النوع فى الاعمال الفنية ما كان داله مضلعا منتظما وراسمه عمود على مستويه ويسمى بالمنشور القائم المنتظم

ولانفراد السطح المنشورى القائم يلاحظ انه بالنظر لتكون سطحه من جملة

مستطيلات متساوية فى القواعد اذا كان منتظما وغير متساوية إن كان غير منتظم وارتفاع كل مستطيل منها مساويا لأحد الاحرف الجانبية للسطح المذكور فانفراده متكونا من مستطيل واحد قاعدته تساوى مجموع قواعد اوجهه وارتفاعه مساو لاحد الاحرف الجانبية

وشكل (٢٤٢) يبين انفراد سطح منشور رباعى قائم منتظم ويتكون من اربعة مستطيلات أما المربع الاعلا والمربع الاسفل فيمثل قاعدتى ذلك المنشور



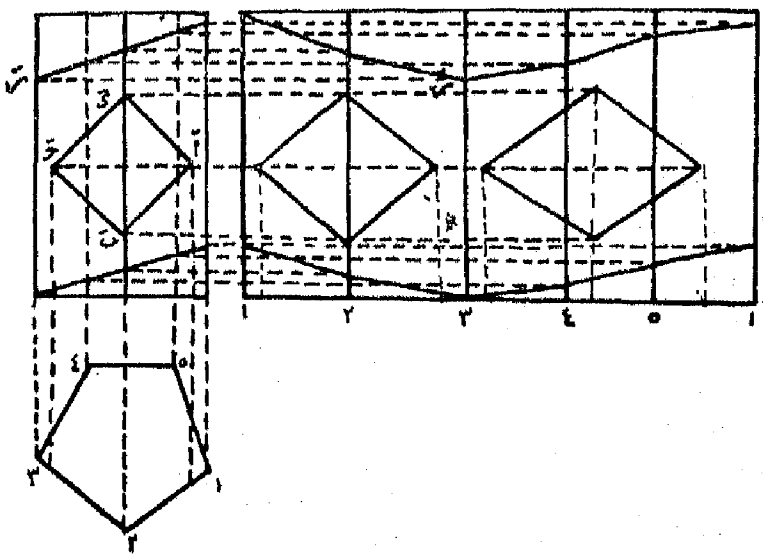
شكل (٢٤٢)

شكل (٢٤٣)

شكل (٢٤٤)

وشكل (٢٤٣) يبين انفراد منشور ثلاثى قائم يتكون من ثلاث مستطيلات وهى أسطحه الجانبية ومثلثين وهما قاعدتاه

والشكل (٢٤٥) يبين المسقط الرأسى والافقى لمنشور خماسى قائم قاعدتاه افقيتان فالاسطح الرأسية لجوانبه هى عبارة عن مستطيلات ارتفاع كل منها هو ارتفاع المنشور وقواعدها تساوى اضلاع قاعدته كل لنظيره فاذا أخذنا خطا أفقيا ووضعنا عليه اطوال ١ ـ ٢ و ٢ ـ ٣ و ٣ ـ ٤ و ٤ ـ ٥ و ٥ ـ ١ تساوى أضلاع القاعدة ١ ـ ٢ و ٢ ـ ٣ و ٣ ـ ٤ و ٤ ـ ٥ و ٥ ـ ١ على التناظر مبتدئين من نقطة ١




شكل (٢٤٥)

ومنتهيين بنقطة ١ ثم رسمنا من كل من النقط ١ و ٢ و ٣ و ٤ و ٥ و ١ أعمدة على الخط ١ ـ ١ كل منها بطول يساوى ارتفاع المنشور لنتج المستطيل المتكون من الخمسة مستطيلات وهى انفراد الأسطح الجانبة لهذا المنشور أما قاعدتاه فكل منها يساوى المضلع ١ ـ ٢ ـ ٣ ـ ٤ ـ ٥ ـ ١ . فى المسقط الافقى

فاذا تصورنا أن هذا المنشور قطع بقطاعين مائلين متوازيين فصار منشورا مائلا فيمكننا ايجاد انفراد الجزء الواقع بين هذين المستويين وهو انفراد المنشور المائل المذكور كالآتى

نرسم من نهايات المساقط الرأسية لكل حرف من أحرف المنشور الجديد خطوط موازية للخط ١ ـ ١ ليقابل نظيره فى الانفراد مثلا من نقطة مَ على مسقط

الحرف مد الموازى الى أن يقابل الخط ٣ على الانفراد فى نقطة ر فاذا عينا كل النقط مثل ر ووصلناها بخطوط مستقيمة لنتج انفراد المنشور المائل المذكور

ولا يصعب على الطالب اذا اتبع هـذه القاعدة إيجاد انفراد هذا المنشور إذا ثقب فيه ثقب مربع كالمبين مسقطه الرأسى بالمربع آ َب َحـ َء وليلاحظ أنه يحتاج الآن الى اضافة أربع خطوط رأسية على جوانب المنشور وإيجاد مواضعها فى الانفراد وهذه الخطوط هى محل تلاقي أركان الثقب بالأسطح الجانبية المنشور فاذا رسمت موازيات من الأركان آ َب َحـ َء أيضا لتقابل مواضع تلك الخطوط على الانفراد ورسمنا أيضا موازيات من نقط تقاطع أسطح الثقب بالاحرف الاصلية للمنشور حتى تقابل مواضع تلك الاحرف على الانفراد ووصلنا هـذه النقط على التعاقب لتكوّن انفراد ذلك الثقب بسهولة وكل ذلك واضح بالشكل (٢٤٥)

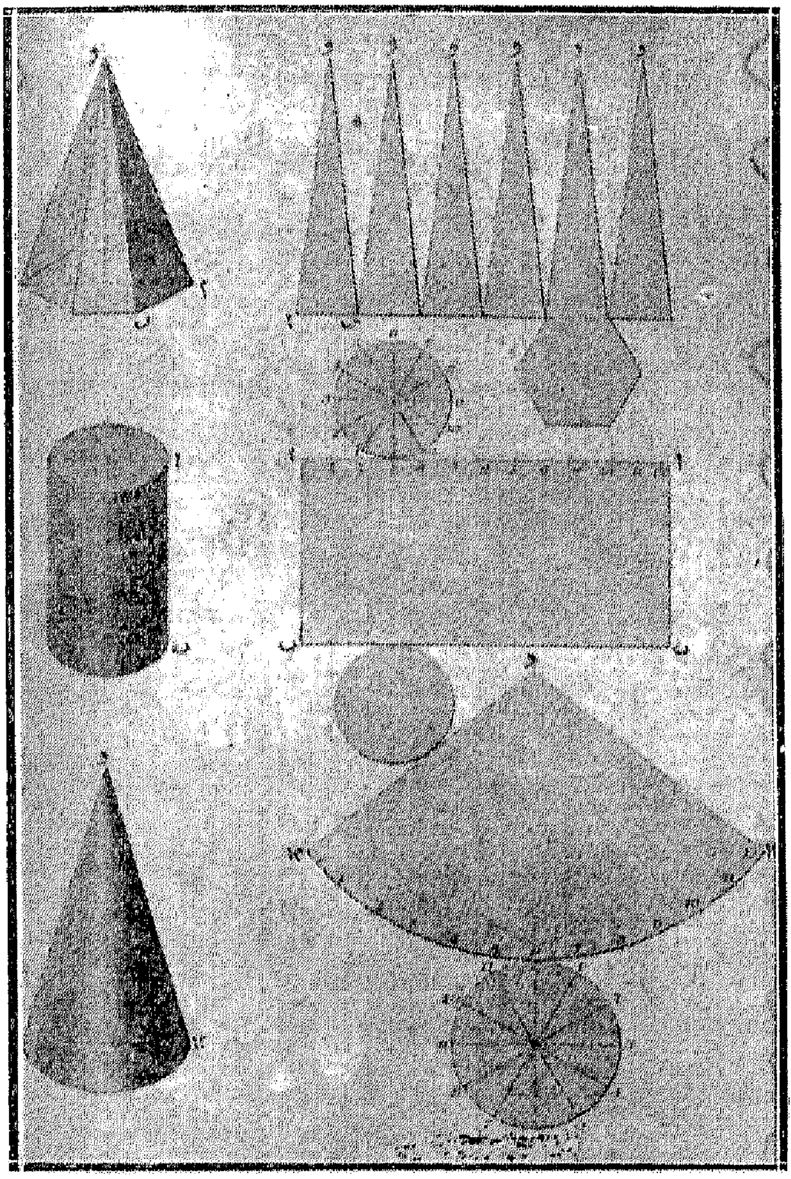
السطح الهرمى : — هو نوع من السطوح المنكسرة يتولد عن تحرك الراسم المستقيم حالة كونه ماراً بنقطة ثابتة ومتكئا على خط منكسر مستو غير موجود فى مستويه

والأكثر استعمالا من هذا النوع فى الاعمال الفنية ما كان داله مضلعا منتظما والنقطة الثابتــة موجورة على العامود القائم من مركزه علي مستويه ويطلق عليه الهرم القائم المنتظم

وللحصول على انفراد السطح الهرمى المنتظم يلاحظ أنه بالنظر لتكوين سطحه الجانبي من مثلثات متساوية الساقين ومتساوية ينفرد سطحه على قطاع من مضلع منتظم نصف قطر الدائرة المرسومة عليه يكون مساويا لطول أحد الاحرف الجانبية للسطح وكل من أضلاعه مساو لطول أحد أضلاع الدال

فاذا كان الهرم غير منتظم فانفراد سطحه الجانبى يتكون من مثلثات يمثل كل منها وجه من أوجهه الجانبية على التوالى بابعاده الحقيقية كما فى الشكل (٢٤٩)

وشكل (٢٤٤) يبين انفراد هرم رباعى قائم منتظم ويتكون من أربع مثلثات كل منها متساوى الساقين وقد وضعت المثلثات فى هذا المثال بحيث كانت قواعدها



شكل (٢٤٦)

شكل (٢٤٧)

شكل (٢٤٨)

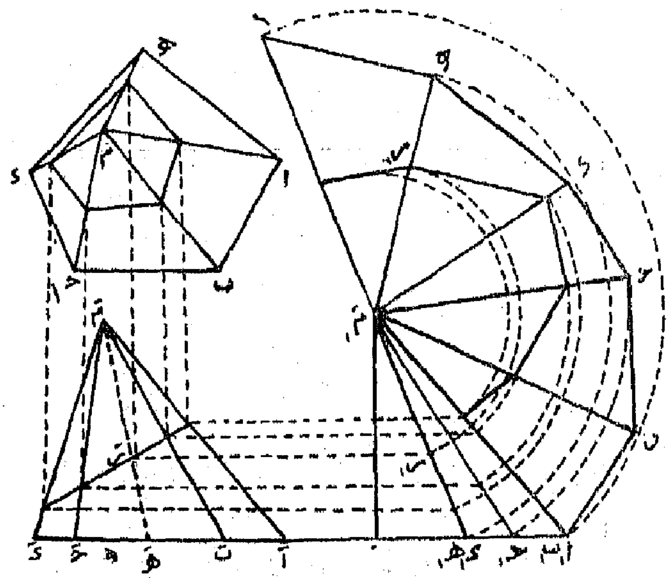
افقية ويمكن رسمها كما ذكر آنفا بجعل رؤوسها في نقطة واحدة وكلتا الطريقتين تفيان بالغرض المطلوب

وشكل (٢٤٦) يبين انفراد هرم سداسى قائم منتظم بنفس الطريقة التى اتبعت فى انفراد الهرم الرباعى السابق الذكر .

والشكل (٢٤٩) يبين المسقط الافقي والرأسى لهرم خماسى غير قائم قاعدته أفقية ولايجاد انفراده يؤتى أولا بالاطوال الحقيقية لأحرفه المائلة هكذا : ـ

كل حرف من هذه الاحرف هو وتر لمثلث قائم الزاوية ارتفاعه يساوى

ارتفاع الهرم وطول قاعدته هو طول المسقط الافقى لهذا الحرف فاذا أخذنا على امتداد المسقط الرأسى للقاعدة الاطوال م١ ا١، م١ ب١، م١ حـ١، م١ ء١، م١ هـ١ يساوى كل منها المساقط الافقية للاحرف وهى على التناظر م ا، م ب، م حـ، م ء، م هـ



١٢

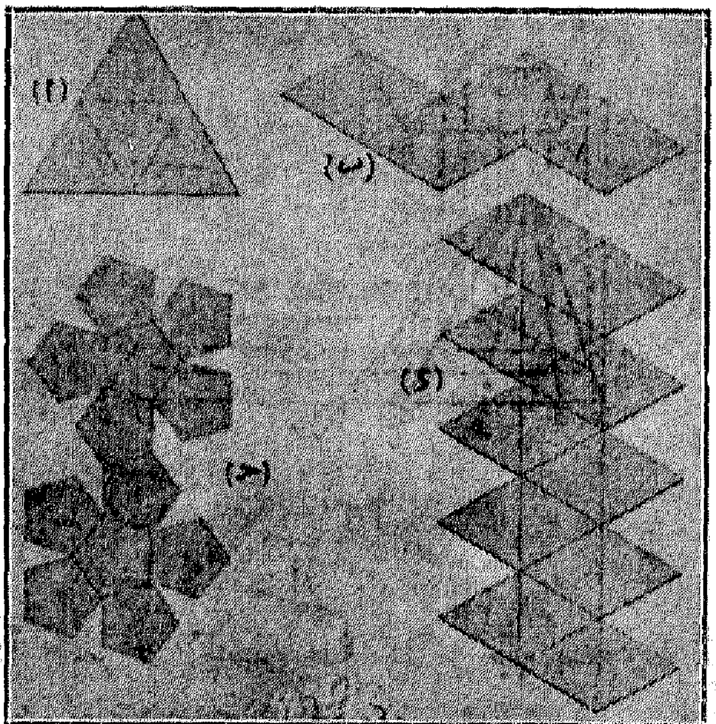
شكل (٢٤٩)

ثم من م١ أقمنا عموداً على م١ هـ١ وأخذنا عليه طول م١ مَ١ يساوى ارتفاع الهرم ووصلنا مَ١ ا١، مَ١ ب١، مَ١ حـ١، مَ١ ء١، مَ١ هـ١ لكانت هذه الاطوال هى أوتار المثلثات السابقة الذكر وهى أيضا الاطوال الحقيقية لاحرف الهرم وصار اذاً من السهل معرفة الاشكال الحقيقية لمثلثات الاوجه الجانبية لان قواعدها جميعها معلوم أطوالها الحقيقية من المسقط الافقى لاضلاع قاعدة الهرم حيث أنها موازية للمستوى الافقى فاذا جمعنا الاشكال الحقيقية لتلك المثلثات بالشرط السابق لنتج الشكل مَ١ ا١ ب١ حـ١ ء١ هـ١ وهو انفراد الهرم

واذا قطع هذا الهرم بقطاع مائل لنتج عن القطاع هرم مائل فاذا رسمت موازيات لقاعدة الهرم من نقط تقاطع المستوى المائل بالاحرف فى المسقط الرأسى مثل رَ لتقابل الاطوال الحقيقية للاحرف كل لنظيره وركزنا فى رأس الانفراد وبطول يساوى المسافة من الرأس الى نقطة التقابل مثل ر١ ورسمنا اقواسا مثل مَ١ ر١ تقابل الخطوط

المناظرة لها فى الانفراد فى نقط مثل ر ووصلنا هـذه النقط لبعضها لنتج انفراد الهرم المائل وكذلك يمكن ايجاد انفراد الهرم الناقص لانه هرم مقطوع بمستو يوازى قاعدته وكل ذلك مبين فى شكل (٢٤٩)

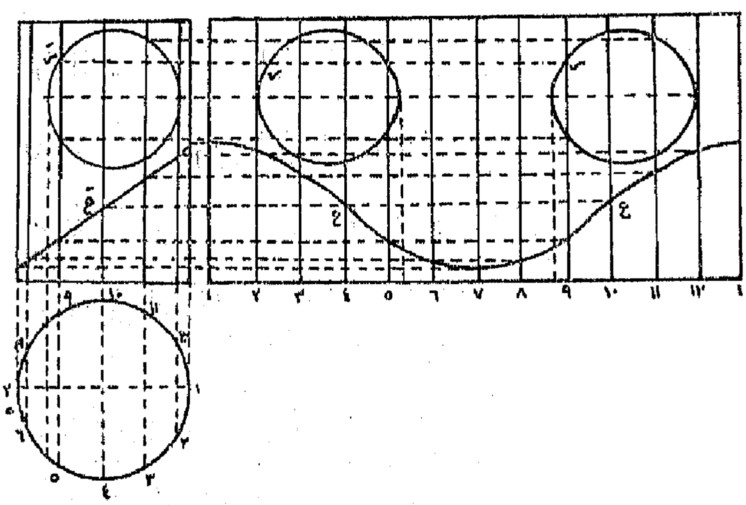
والشكل (٢٥٠) (ا) و (ب) و (حـ) و (ى) يبين انفراد سطح الهرم الثلاثى المنتظم وسطح ذى الثمانية والاثنى عشر والعشرين وجها المنتظم على التوالى وواضح من الشكل كيفية ايجاد انفراد كل منها




شكل (٢٥٠)

**السطح الاسطوانى** : — هو نوع من السطوح المركبة ويتولد عن تحرك الراسم المستقيم بالتوازى لنفسه حالة كونه متكئا على خط منحن مستو غير موجود فى مستويه والاكثر استعمالا من هـذا النوع فى الاعمال الفنية ما كان داله محيط دائرة وراسمه عمودا على مستويه ويسمى سطح اسطوانى تحركى أو قائم ويمكن تعريف هذا السطح ايضا بانه هو نهاية لسطح منشورى تحتوى قاعدته على عدد لا نهاية له من الاضلاع فيمكن بهذا التعريف تطبيق جميع ما سبق فى السطح المنشورى على السطح الاسطوانى

ويكفى ايضا للحصول على انفراد السطح الاسطوانى ان يرسم مستطيلا يوخذ أحد بعديه مساويا لمحيط قاعدة الاسطوأنه و بعده الآخر مساويا لطول الراسم والشكل ٢٤٧ يبين منظورا لاسطوانة ويبين انفرادها وهو المستطيل ا ب ب ا وقد اتبعت فيها نفس الطريقة التى انبعناها فى ايجاد انفراد المنشور بأن قسمت قاعدتها الى جملة اضلاع متساوية واخـذنا طول ضلع مستطيل الانفراد ب ب مساويا لمحيط القاعدة وعلّمنا عليها مواضع رواسم وهمية وهى تقاطع الاوجه الجانبية



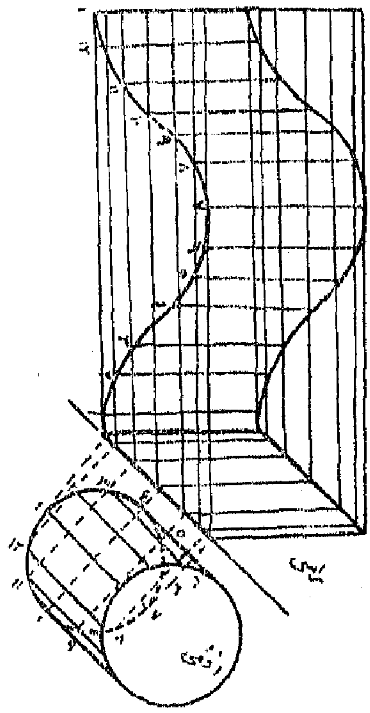
شكل (٢٥١)

للاسطوانة بفرض انها صارت منشورا واخذ طول كل راسم منها مساويا لارتفاع الاسطوانة فنتج المستطيل ا ب ب ا المذكور

والشكل (٢٥١) يبين انفراد اسطوانة كالسابقة وبها ثقب مستدير ويبين ايضا انفراد قطاع مائل فيها والشكل (٢٥٢) يبين كيفية ايجاد انفراد سطح اسطوانة مائلة قاعدتاها متوازيتين وهو كما يأتى :ـــ

تقسم الدائرة التى هى المسقط الافقى لقاعدة الاسطوانة الى اثنى عشر قسما عند النقط ١ و ٢ و ٣ الخ ومن تلك النقط التى نعتبرها نهايات لجملة رواسم فى الاسطوانة نجد المساقط الرأسية والافقية لتلك الرواسم وعند الانفراد لا نجد أن هذه الرواسم متساوية البعد عن بعضها كما كان ذلك فى انفراد رواسم الاسطوانة القائمة بل نجد

أن كل من المسافات ١ ـ ٢ و ٢ ـ ٣ و ٣ ـ ٤ يساوى بالتقريب جزء من اثنى عشر جزءا من محيط القاعدة والنقط ١ و ٢ و ٣ الخ على الانفراد تقع على خطوط متعامدة على المسقط الرأسى لمحور الاسطوانة كما هو مبين بالشكل وحينئذ يمكن تعيين تلك النقط على الانفراد بسهولة بأخذ أبعاد متساوية ومساوية الى وتر قوس يساوى $\frac{1}{12}$ من محيط القاعدة مبتدئين من النقطة ١ الى ١٢ ورسم موازيات منها المسقط الرأسى لرواسم الاسطوانة وأخذ طول كل من هذه الموازيات يساوى طول المسقط الرأسى للراسم أيضا ينتج فى النهاية الشكل المحدود بمنحنين متوازيين المبين فى الشكل (٢٥٢)



شكل (٢٥٢)

السطح المخروطى : هو نوع من السطوح المركبة يتولد عن تحرك الراسم المستقيم حالة كونه مارا بنقطة ثابتة ومتكئا على خط منحن مستو غير موجود فى مستويه والا كثر استعمالا من هذا النوع فى الاعمال الفنية ما كان دالة محيط دائرة والنقطة الثابتة موجودة على العمود القائم من مركزه على مستويه ويسمى سطحا مخروطيا تحركيا أو قائما

فللحصول على انفراد هذا السطح يلاحظ انه ينفرد على قطاع دائرى قطره مساو لطول راسمه ومقدار الزاوية المحصورة به تتعين من القانون الآتى وهو

$$ه^{\circ} = \frac{٣٦٠ \times س}{ل}$$

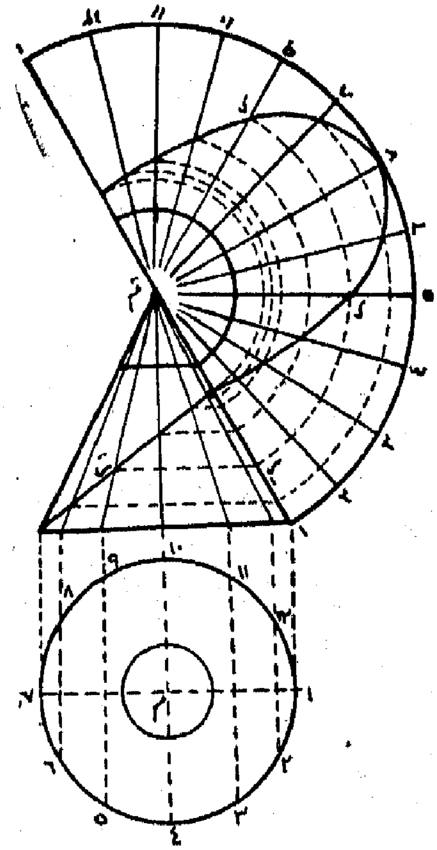
حيث ه هي الزاوية المحصورة بالقطاع الدائرى و س نصف قطر قاعده المخروط و ل طول الراسم وبطريقة أخرى يمكننا رسم القطاع الدائرى هذا بأن نركز فى رأس المخروط وبنصف قطر يساوى طول الراسم ونرسم قوسا من دائرة مساويا لمحيط قاعدة المخروط .

ولقياس طول هذا القوس عمليا يقسم محيط القاعدة الى اضلاع متساوية كما لو كان المخروط هرما شكل (٢٤٨) ولتكن اثنى عشر ضلعا ١و٢و٣ الخ ويفتح البرجل بمقدار طول ضلع منها ويعلم على طول القوس أوتار عددها اثنى عشر كل منها مساويا لفتحة البرجل فيتحدد طول القوس المساوى لمحيط قاعدة المخروط بالتقريب وكلما زاد عدد الاقسام كلما قرب طول القوس من حقيقته

فاذا قطعنا المخروط شكل ٢٥٣ بقطاع مائل وأردنا ايجاد انفراد المخروط المائل المحدود بهذا القطاع كقاعدة ونقطة الرأس م نعين الأطوال الحقيقية للرواسم المقطوعة مثل م ر برسم خط مواز للقاعدة من رَ الى أن يقابل الراسم م ا فى نقطة ر، فيكون الطول م ر، هو الطول الحقيقى للراسم المقطوع واذا أخذنا هذا الطول على موضع الراسم فى الانفراد وهو م ر، على الخط م — ٩ تكون نقطة ر هى أحدى نقط انفراد القطاع وبايجاد النقط الاخرى مثل ر وتوصيلها بمنحن ينتج انفراد القطاع المطلوب وهو مبين بالشكل (٢٥٣)

وهكذا يمكننا ايجاد انفراد المخروط الناقص بقطعه بقطاع يوازى القاعدة فيكون انفراد المخروط الناقص هو عبارة عن جزء من حلقه دائريه كما باالشكل ايضا

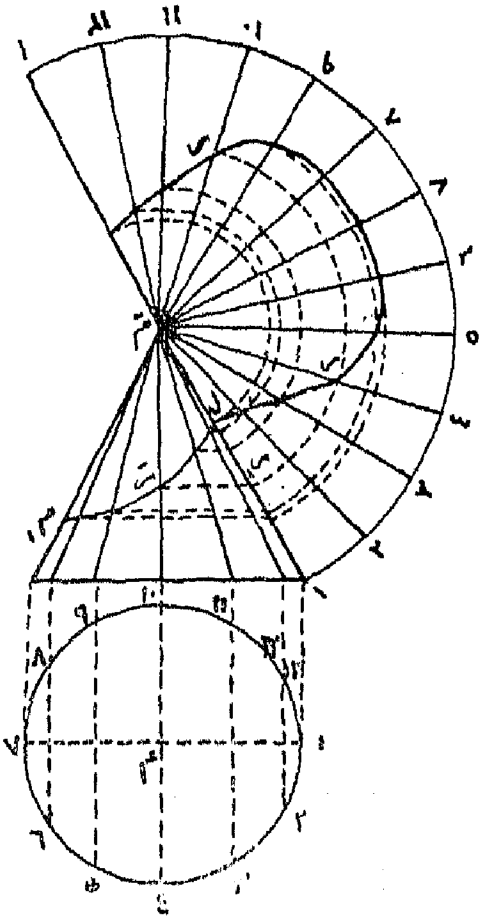
والشكل (٢٥٤) يبين المسقط الرأسى والافقى للمخروط السابق الذكر ومقطوع بقطاع منحن ل م، فلايجاد انفراد الجزء الباقى من المخروط نعين المساقط الرأسية والافقية لجملة رواسم على المخروط كما لو كان هرما ونأت بانفراد المخروط بالكامل ونضع مواضع الرواسم على هذا الانفراد مثل مَ — ١ و مَ — ٢ و مَ — ٣ الخ ثم نأخذ نقط تقاطع القطاع بالمساقط الرأسية



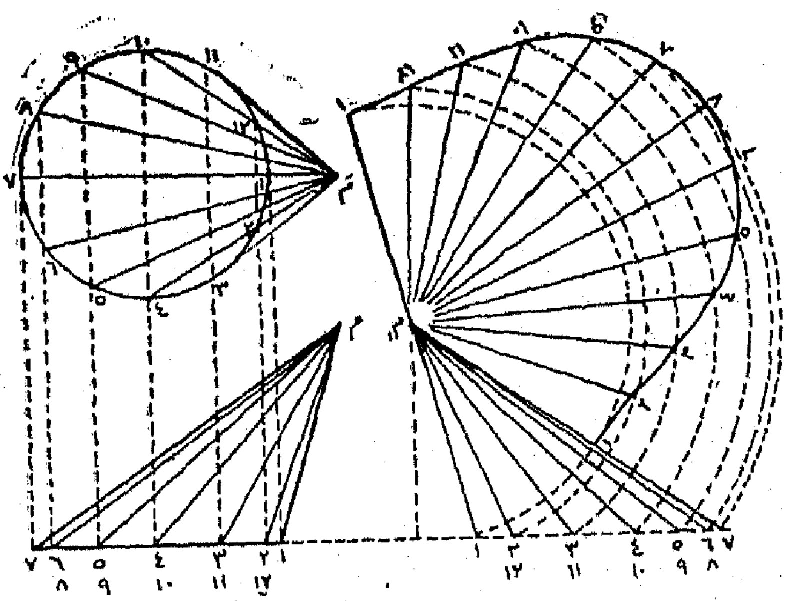
شكل (٢٥٣)

للرواسم ونرسم منها موازيات للقاعده مثل الموزى من نقطة ر َ مثلا ايقابل الخط م َ—١ وهو الطول الحقيقى لكل راسم فى المخروط فى نقطة ر، ونركز فى م َ وبنصف قطر يساوى م ر، ونرسم قوساً يقطع موضع الراسم م َ—١٠ فى الانفراد فى نقطة ر فبتوصيل جميع النقط مثل ر ببعضها ينتج انفراد الجزء المطلوب

والشكل ( ٢٥٥ ) يبين كيفية ايجاد انفراد مخروط دائرى مائل وهو ما كانت رأسه ليست على خط عمودى من مركز قاعدته أو بمعنى آخر ما كان محوره مائلا وهذه الطريقة تشابه تماما طريقة انفراد هرم كما بالشكل فيمكن تخطيط جملة رواسم



شكل ( ٢٥٤ )

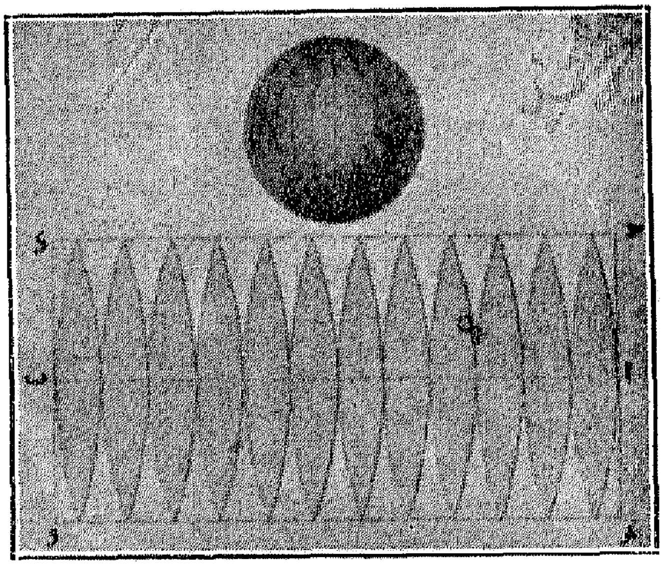


شكل ( ٢٥٥ )

على السطح الجانبي المخروط ومعرفة مساقطها الرأسية والافقية فيكون الطول الحقيقى لكل راسم هو عبارة عن طول وتر لمثلث قائم الزاوية قاعدته تساوى طول

المسقط الافقى لذلك الراسم وارتفاعه يساوى ارتفاع المخروط فاذا أوجدنا أطوال الرواسم وفرضنا أن الاوجه الجانبية المحصورة بين تلك الرواسم هى الاوجه الجانبية لهرم كان من السهل ايجاد شكل الانفراد

فاذا وصلنا نهايات تلك الرواسم فى الانفراد بمنحن بدلا من خطوط مستقيمة لتكوّن الشكل الحقيقى لنهاية السطح المخروطى لهذا المخروط وكل ذلك واضح بالشكل



( شكل ٢٥٦ )

**بند ٣٨ ـ السطوح الغير قابلة للانفراد**

السطح الكروى : وهو نوع من السطوح المنحنية التحركية يتولد عن الدورة الكاملة لنصف محيط دائرة حول قطرها ونهايتى ذلك القطر يسميان بالقطبين . وللحصول على انفراد السطح الكروى شكل ( ٢٥٦ ) يقسم محيطه الى أقسام متساوية عددها اثنى عشر ثم يرسم الخط ا ب مساويا لمحيط السطح الكروى ويؤخذ عليه أطوال هذه الاقسام على التوالى ثم يفتح البرجل فتحة تساوى تسعة أقسام من الاثنى عشر قسما المذكورة ( أو بمعنى آخر تساوى ثلاثة أرباع المحيط ) ونرسم أقواسا تمر بنقط التقاسيم ومراكزها على امتداد الخط ا ب من الجهتين فيصير عدد تلك الاقواس اربع وعشرين قوسا يتقابل كل اثنين منها أعلى

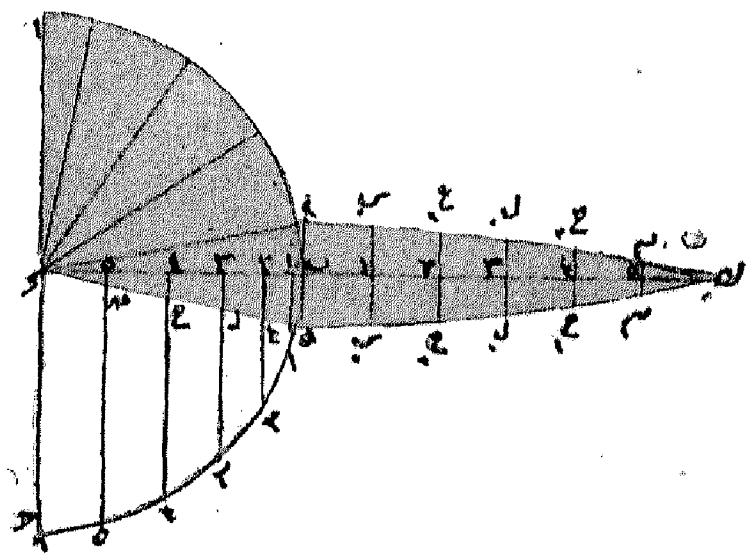
واسفل فى نقط على استقامة واحدة وعلى الخطين حـ ء ٯ هـ و الموازين للخط ا ب
وبذا يتكون اثني عشر شقة هى انفراد سطح الكرة المطلوب .

**نصف الكرة أو القبة الدائرية : —**

يمكن ايجاد انفراد نصف الكرة وهو نصف انفراد الكرة كما فى البند السابق ويمكن ايجاده بطريقتين اخريتين ايضا كما يأتى : —

**أولا** ـ ليكن ا ب حـ شكل (٢٥٧) هو نصف المسقط الافقى للقبة مركزه و

**العمل** ـ نقسم نصف المسقط الأفقي هذا الى اقسام متساوية وليكن و هـ ء هو جزء من تلك الاقسام ونقطة ب هى منتصف القوس هـ ء نصل و ب ونمده من جهة ب الى ك بحيث تكون المسافة ب ك ربع محيط الدائرة و ثم نقسم ب حـ وهو

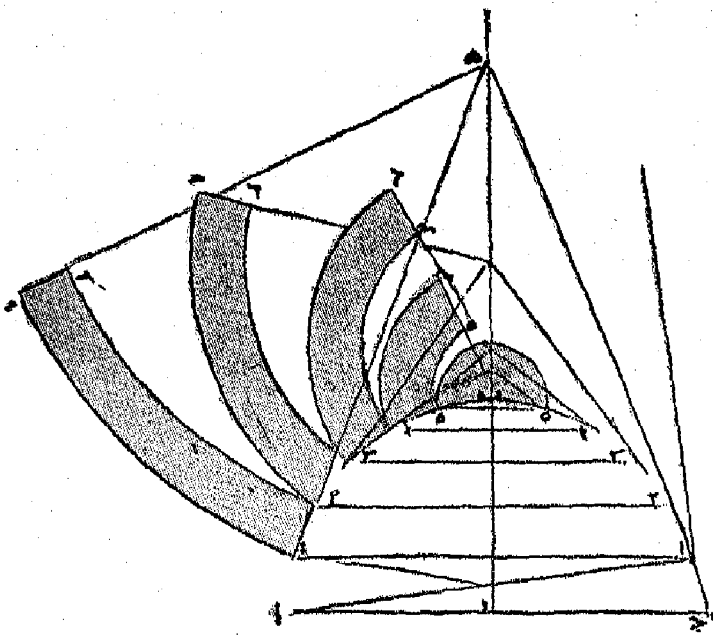


شكل (٢٥٧)

ربع المحيط أيضا الى أقسام متساوية بالنقط ١ ـ ٢ ـ ٣ ـ ٤ الخ وبنفس الاقسام نقسم الخط ب ك ابتداء من ب ثم نرسم مستقيمات موازية لنصف القطر و حـ من جميع النقط التى على ربع المحيط ب حـ وكذا من النقط التى على ب ك فالمستقيمات المرسومة من النقط ١ ـ ٢ ـ ٣ على المحيط تقابل الخط المرسوم من هـ الى و فى نقط مثل ع ٯ ل ٯ م الخ فنفتح البرجل بمسافات تساوى ١ ـ ع ٯ ٢ ـ ل الخ المبتدئة من ب الى و ونعلمها على الخط من ب الى ك على التناظر من الجهتين فينتج النقط ع١ ل١ م١ الخ ٯ ع٢ ل٢ م٢ الخ ونصل النقط ك١ ن١ م١ ل١ ع١ س١ ٯ ك٢ ن٢ م٢ ل٢ ع٢ س٢ ، ينتج انفراد القسم و هـ ء من أقسام القبة الدائرية ونتبع هذه الطريقة فى باقى الاقسام فنحصل على انفراد القبة

ثانيا ـ ليكن اـهـ هو المسقط الرأسى للقبة شكل (٢٥٨)

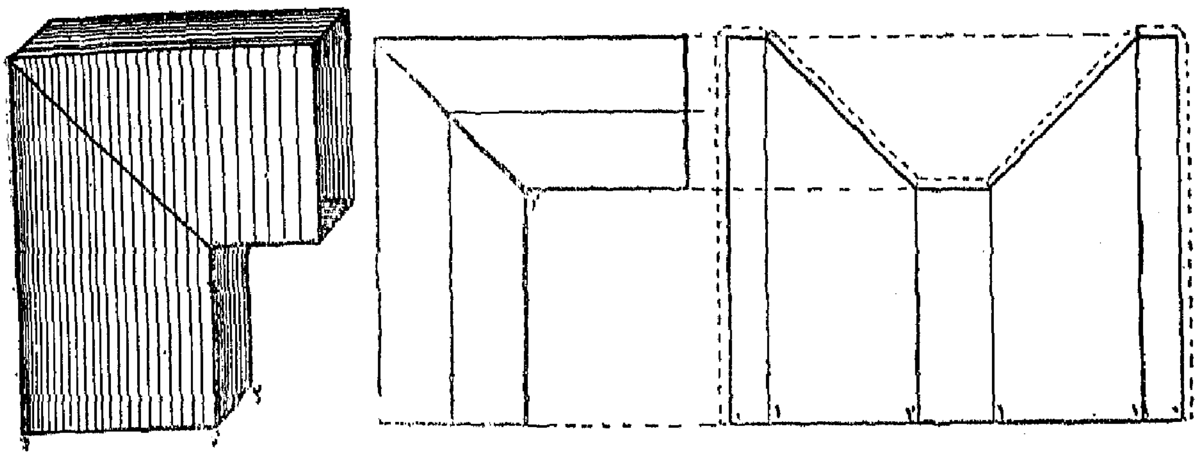
العمل : نقسم القبة الى أقسام متساوية الارتفاعات بواسطة مستويات أفقية ونعتبر كل قسم منها كانه مخروط ناقص ورؤوس كل هذه المخروطات تكون على الخط و هـ فمثلا الجزء ١ ـ ٢ ـ ٢ ـ ١ هو مخروط ناقص قطر قاعدته السفلى هو الخط ١ ـ ١ فاذا اعتبرنا ان كل من القوسين ١ ـ ٢ و ١ ـ ٢ خطا مستقيما ومددناهما على استقامتهما من جهة ٢ ليقابلا و هـ



شكل (٢٥٨)

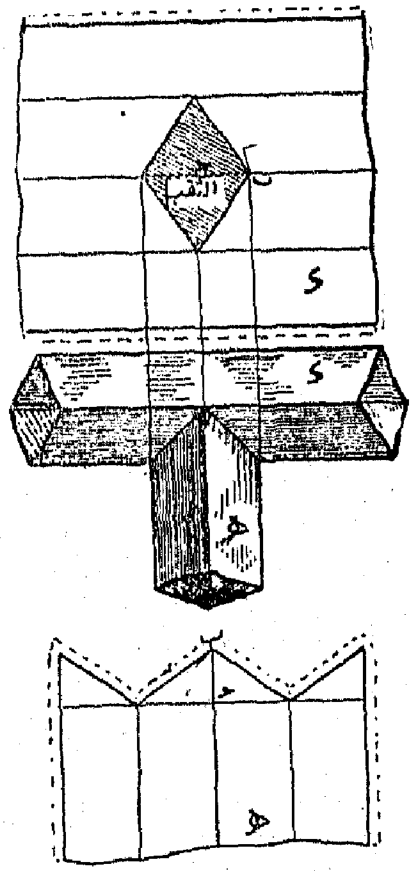
فى هـ لكانت هـ هى رأس هذا المخروط الناقص الذى يمكن ايجاد انفراده بسهولة كما سبق وهكذا يتبع فى اجزاء القبة الباقية كما هو واضح من الشكل

ولاهمية هذا الباب فى أعمال السمكرية وغيرها نأتى بامثلة محلولة لانفراد اسطح عدة أجسام بالاشكال من ٢٥٩ الى ٢٧٣ كثيرا ما تقع تحت نظر الطالب أو العامل فيستعين بها على استنباط الطرق الاخرى اللازمة لانفراد مايقع تحت نظره خلافها وقد اكتفينا برسمها دون ذكر الخطوات التى اتبعت فى حلها حيث لا يمكن شرحها فى الصفحات القليلة التى خصصت لهذا الباب من هذا الكتاب ومن يريد التعمق فى هذا الباب فعليه الاطلاع فى الكتب الخاصة بالانفراد وباشغال المعادن اللوحية التى ربما يعنى المؤلف الاول فيما بعد بوضع كتاب خاص فيها : ـــ



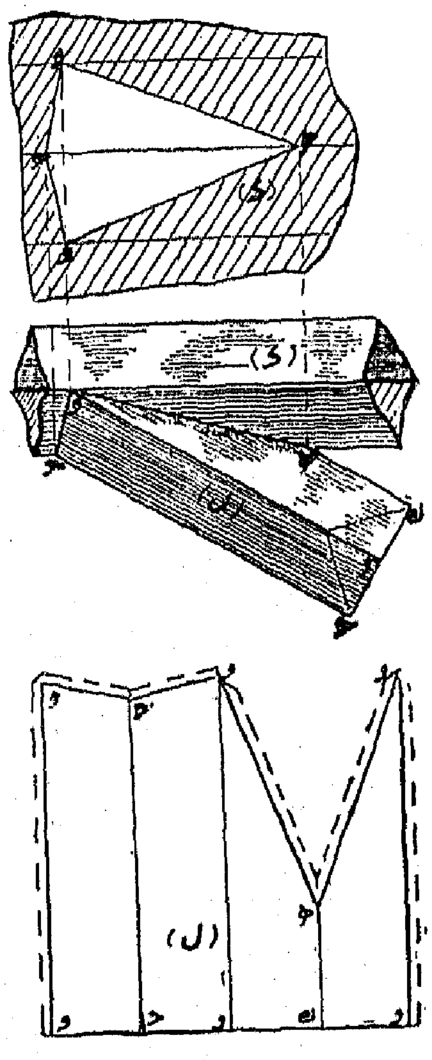
شكل (٢٥٩)

منظور ومسقط وانفراد احد جزئي كوع مربع لماسورة قطاعها مستطيل



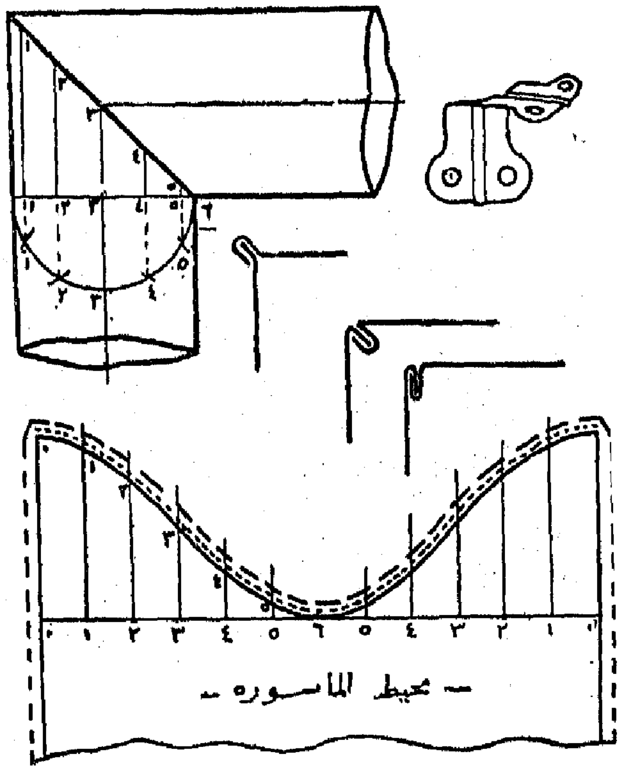
شكل (٢٦٠)

وصلة حرف T قائمة لماسورة مربعة

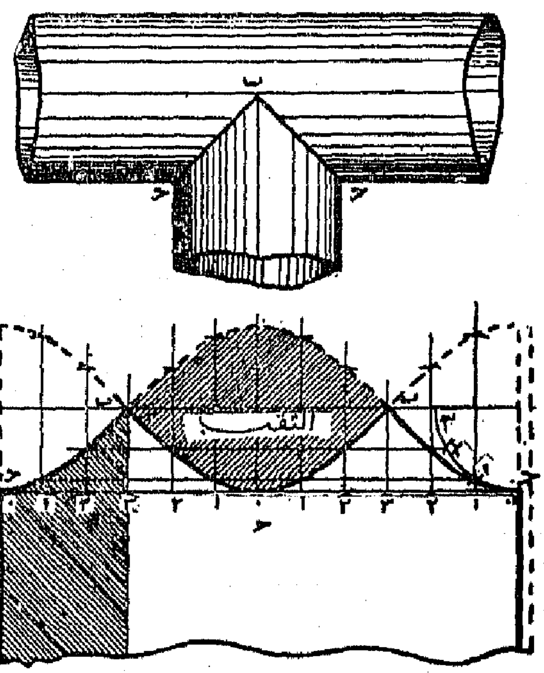


شكل (٢٦١)

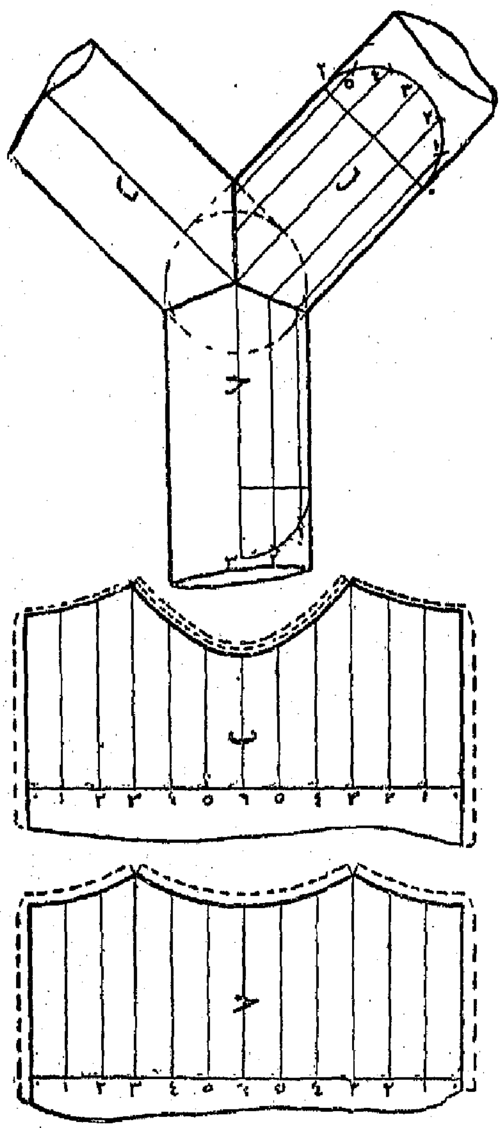
وصلة حرف T مائلة لماسورة مربعه




شكل (٢٦٢) مسقط وانفراد كوع مربع من ماسورة مستديره

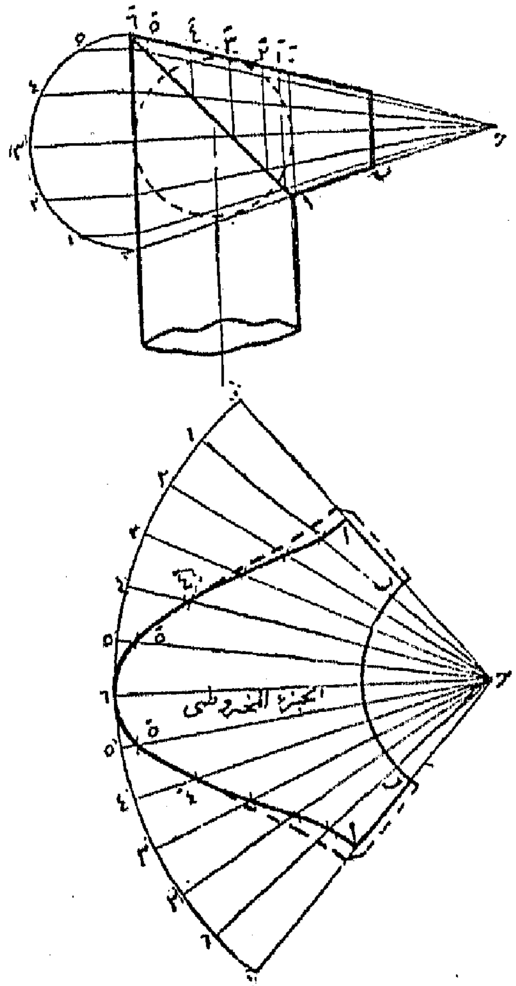



شكل (٢٦٣) مسقط وانفراد وصلة حرف T قائمة من ماسورة مستديرة

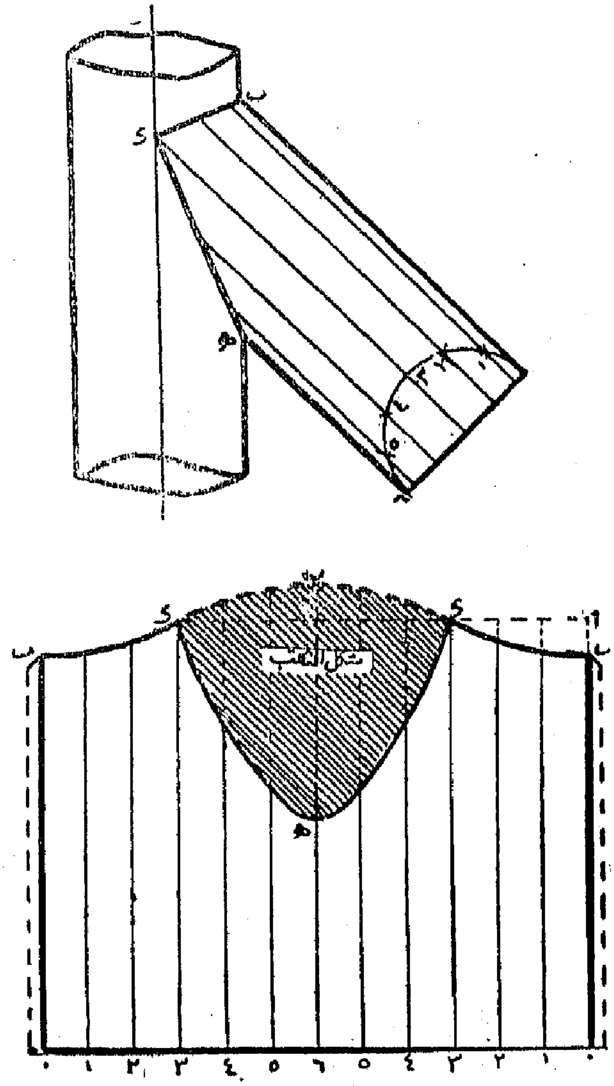


شكل (٢٦٤) وصلة ثلاثية لماسورة مستديرة

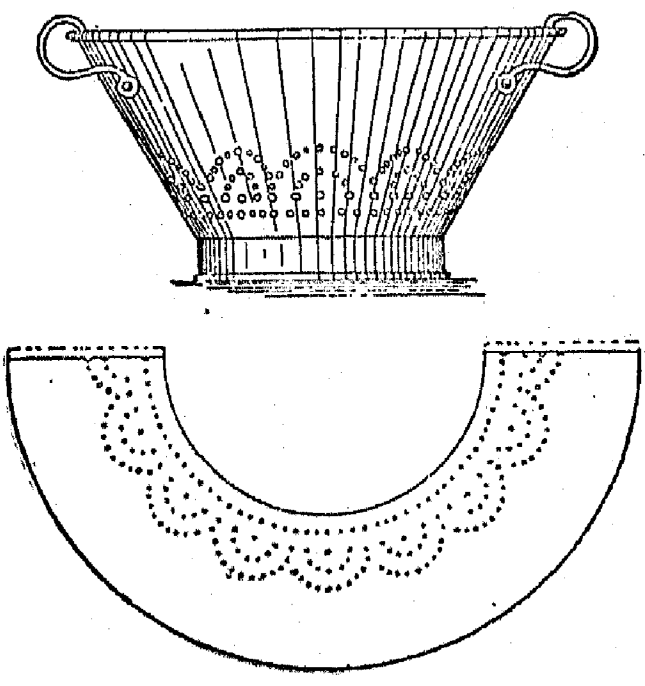
غير متساوية الاقطار



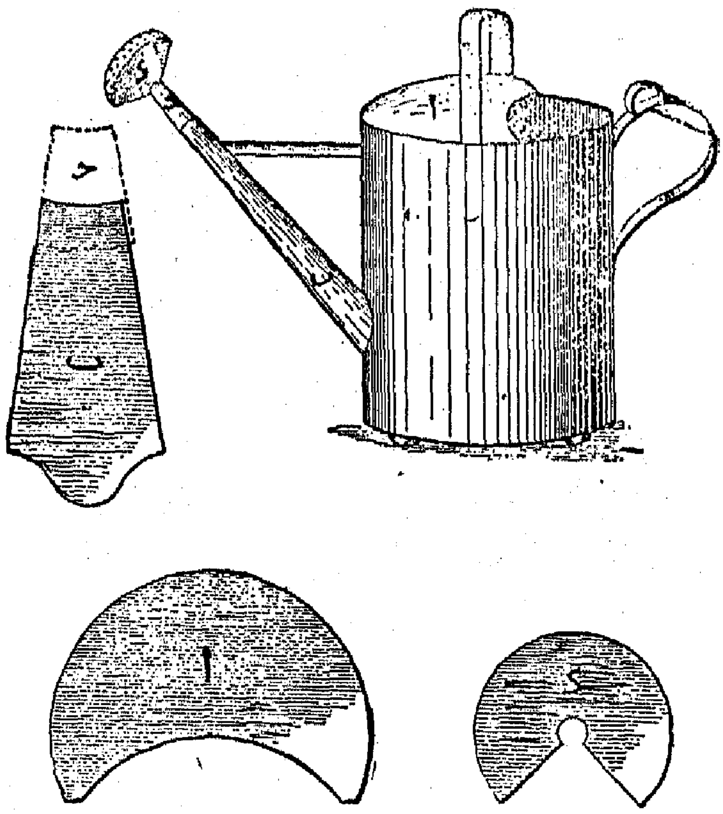

شكل (٢٦٦) انفراد كوع ماسورة مستديرة ومخروطية



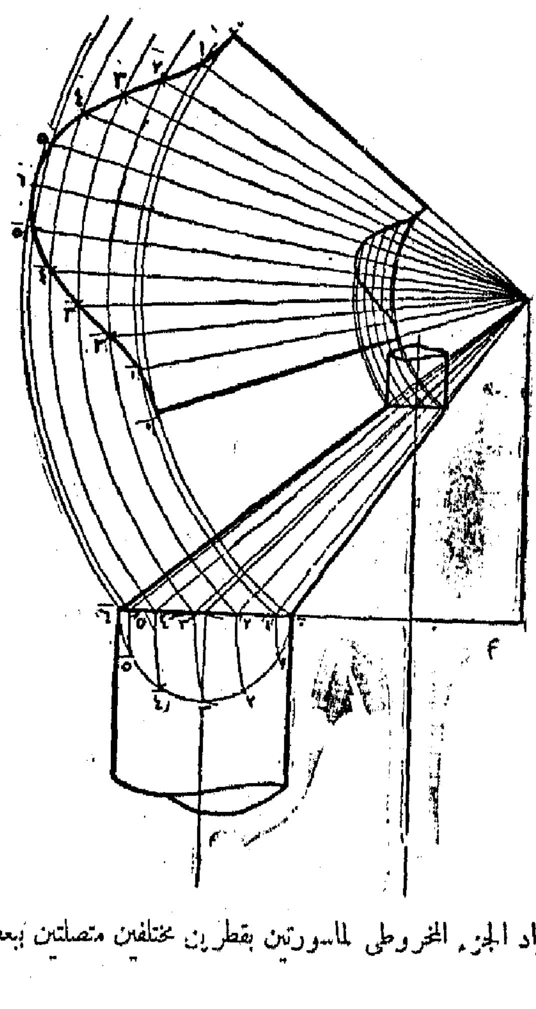

شكل ( ٢٦٥ ) مسقط وانفراد وصلة
حرف T مائلة لماسورة مستديرة



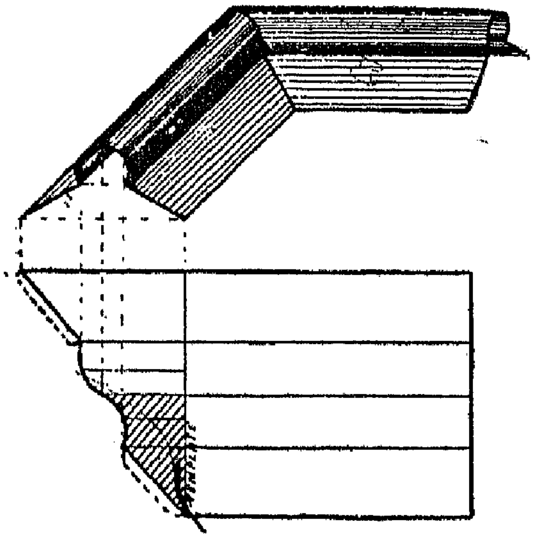
شكل (٢٦٧)
مسقط وانفراد الجزء
المخروطى من سلة



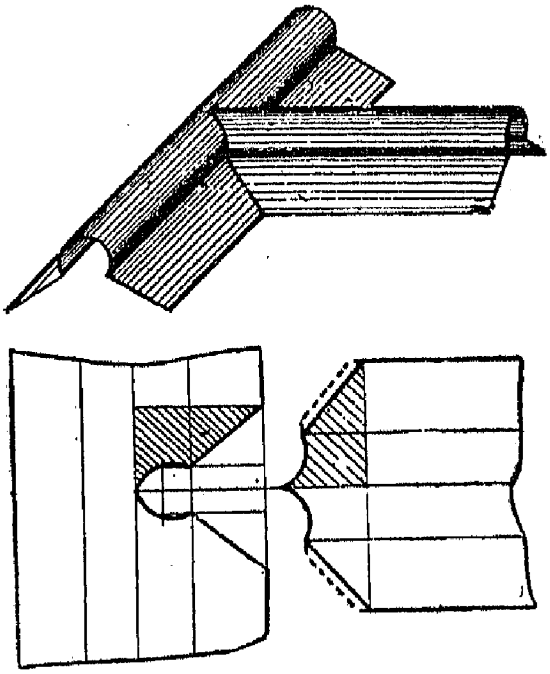
شكل (٢٦٨) منظور وانفراد رشاش ماء



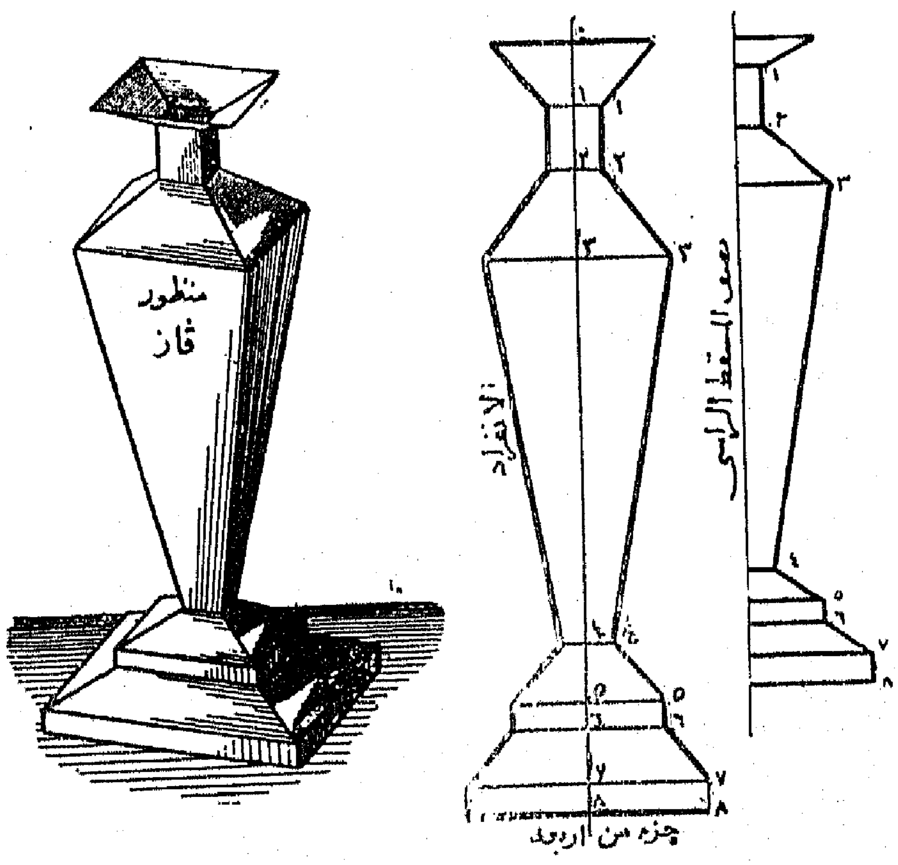
شكل (٢٦٩) انفراد الجزء المخروطى لماسورتين بقطرين مختلفين متصلتين ببعضهما بماسورة مخروطية



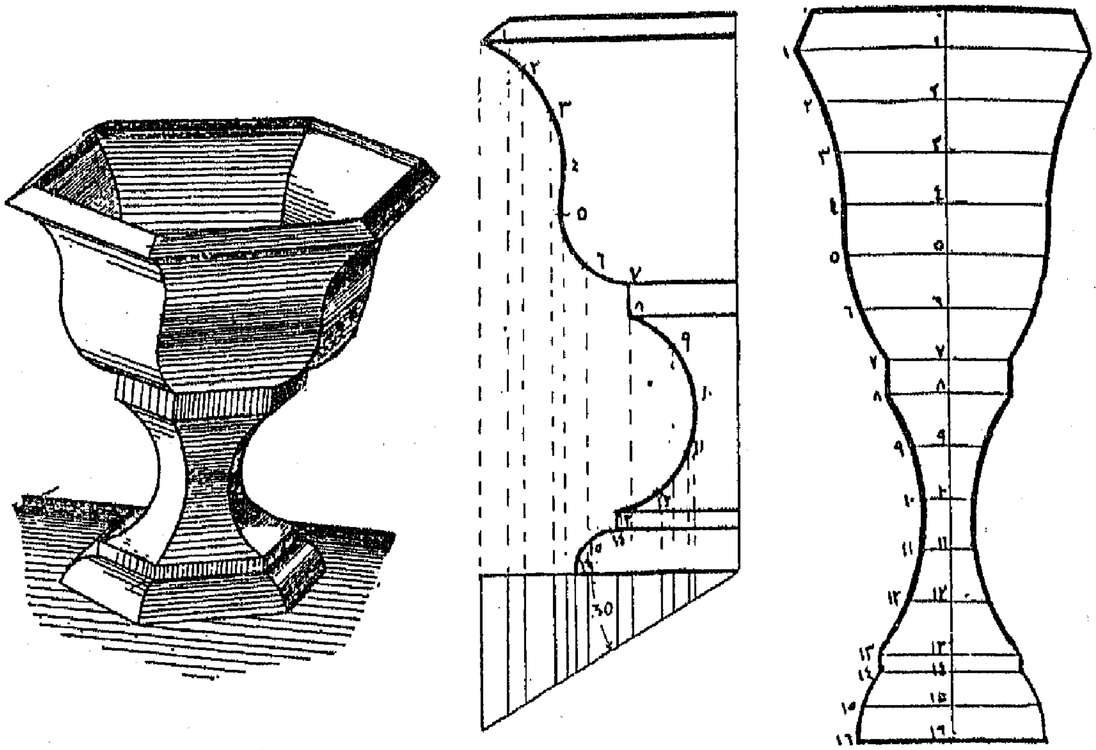
شكـل (٢٧٠) انفراد وصلة مائلة لرأس سقف جمالونى



شكل (٢٧١) انفراد وصلة قائمة لرأس سقف جمالونى




شكـل (٢٧٢) منظر وانفراد احد جوانب فاز للزهور



شكل (٢٧٣) منظور ومسقط وانفراد وجه من اوجه كأس

## تمرينات (١٠)

### على الانفرادات

ملاحظة : خذ طول ضلع المربع فى المسائل الثلاثة الاول مساويا لسنتيمتر واحد

( ١ ) ارسم انفراد الهرم الرباعى القائم الناقص المبين فى شكل (٢٧٤)

( ٢ ) ارسم انفراد المنشور المائل شكل (٢٧٥) وقاعدته مربعة وبه ثقب مستطيل ظاهر على مسقطه الرأسى فقط وبيّن حدود الثقب على الانفراد

( ٣ ) ارسم انفراد كل منشور من المنشورين المتقاطعين فى شكل (٢٧٦)

( ٤ ) ارسم انفراد اجزاء وصلة المواسير المبينة بشكل (٢٧٧)

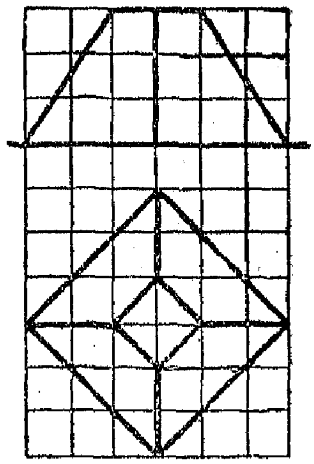
( ٥ ) شكل (٢٧٨) يبين المسقط الرأسى لاسطوانة مقطوعة بقطاع مستو مائل وقطاع دائرى كما هو موضح بالرسم والمطلوب رسم انفرادها

( ٦ ) ارسم انفراد المخروط المقطوع المبين بشكل (٢٧٩)

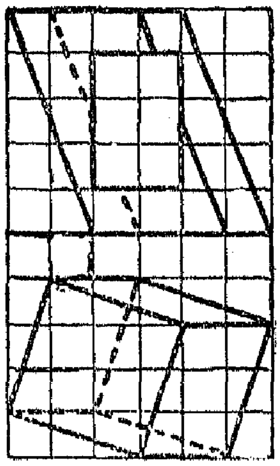
( ٧ ) ارسم انفراد الوصلة المخروطة المبينة بشكل (٢٨٠)

( ٨ ) ارسم انفراد الوصلة المبينة بشكل (٢٨١)

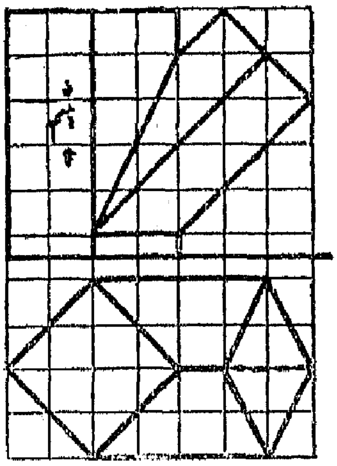
( ٩ ) ارسم انفراد الاشكال المبينة من (٢٨٢) الى (٢٨٧)



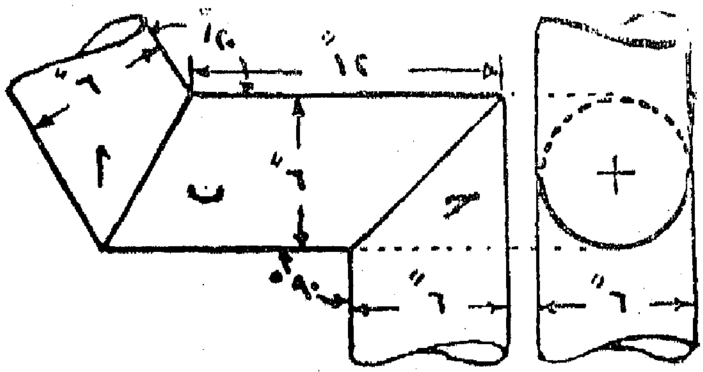
شكل (٢٧٤)



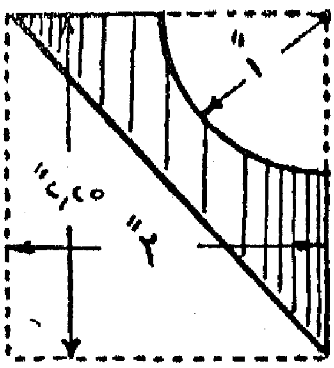
شكل (٢٧٥)



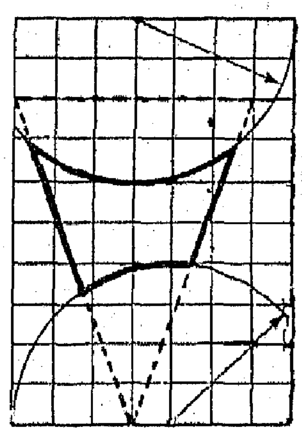
شكل (٢٧٦)



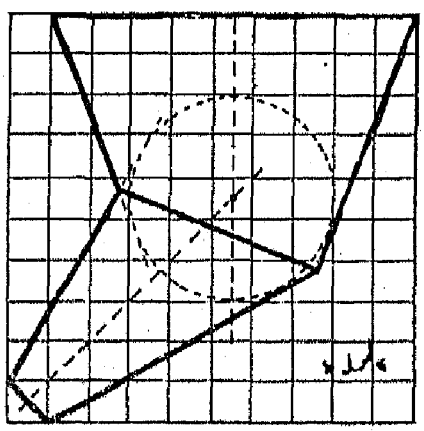
شكل (٢٧٧)



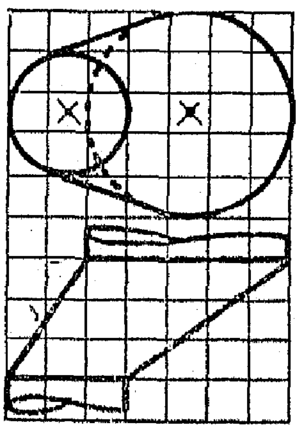
شكل (٢٧٨)



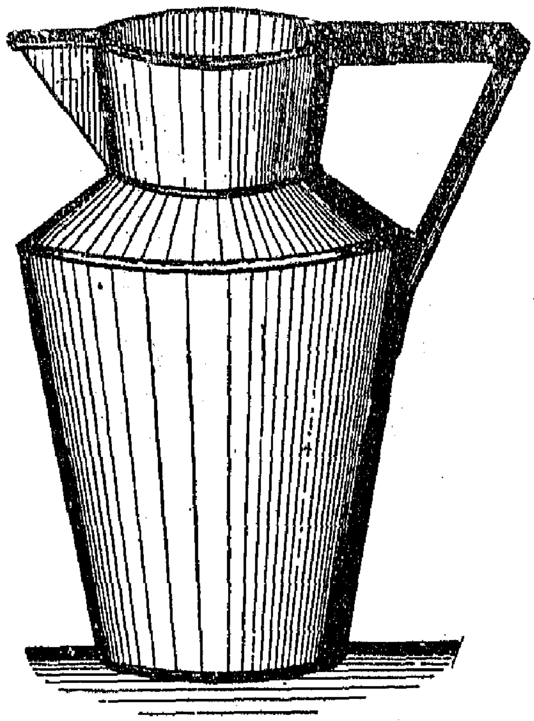
شكل (٢٧٩)



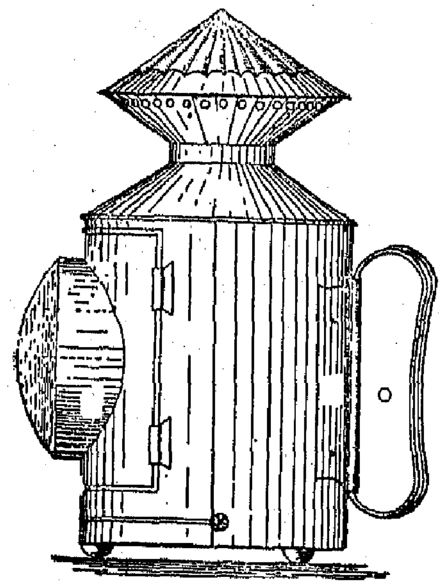
شكل (٢٨٠)



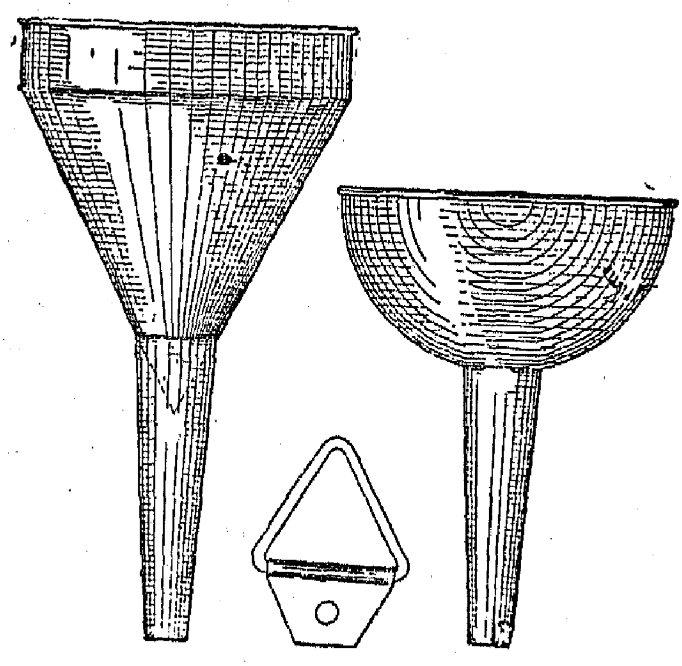
شكل (٢٨١)



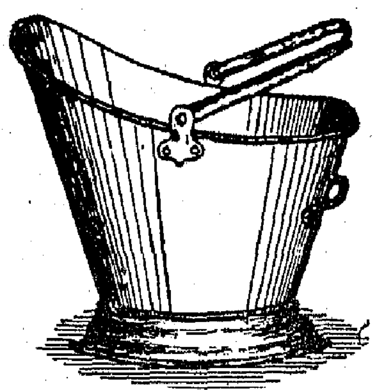
شكل (٢٨٢)



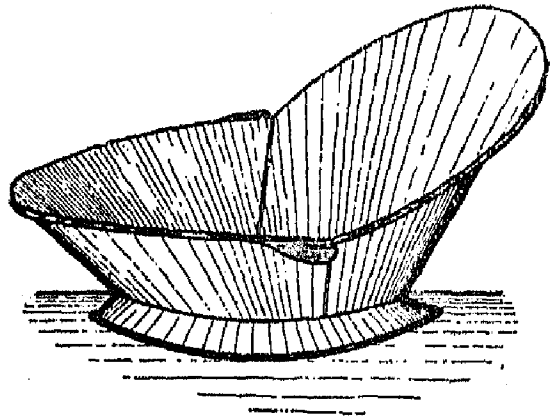
شكل (٢٨٣)



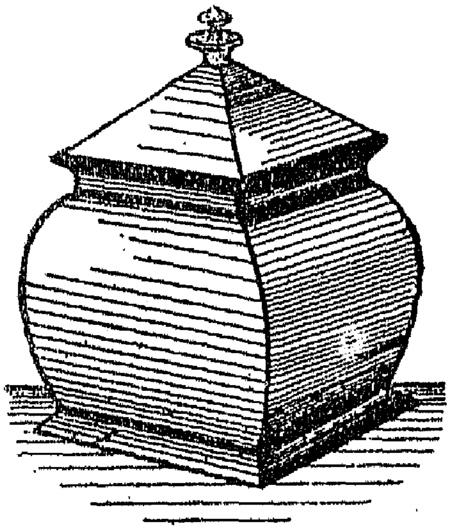
شكل (٢٨٤)



شكل(٢٨٥)



شكل (٢٨٦)



شكل (٢٨٧)

# الفصل الحادى عشر

## فى تقاطع السطوح

**بند ٣٩ — الطريقة العامة لايجاد تقاطع سطحين ببعضهما**

**المفروضه :** السطحان ١ ، ب

**والمطلوب** ايجاد تقاطع كل منهما مع الآخر

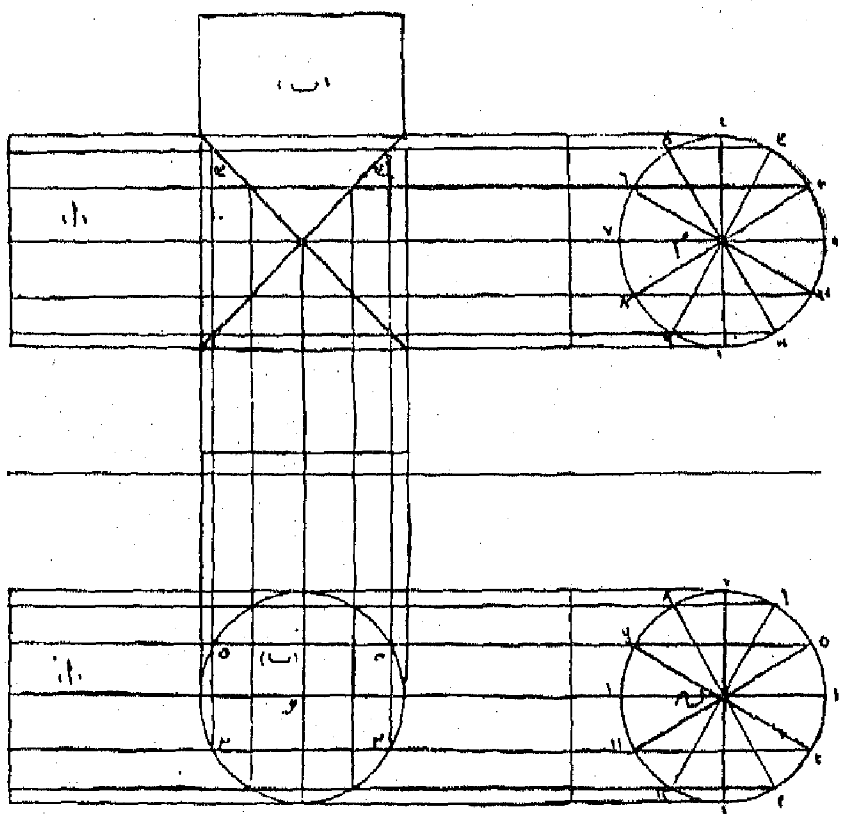
**العمل :** — نقطع كل من السطحين ١ ، ب بمستوٍ ثالث مثل حـ وننتخب المستوى الاخير بحيث يكون تقاطعه مع كل من ١ ، ب خطوط مستقيمة أو دوائر يسهل رسمها فاذا تقاطع حـ مع ١ فى الخط ء ومع ب فى الخط هـ فنقطة تقابل الخط ء بالخط هـ تقع على خط تقاطع السطحين وبتحرك المستوى حـ الى عدة مواضع يمكن تكوين خط تقاطع السطحين ١ ، ب المطلوب

وحيث ان السطوح فى الغالب هى ما تحد اجساما فعند اختراق جسم بآخر يتقاطع سطوح أحدهما بسطوح الآخر وينتج عن ذلك خطوط مستقيمة أو منحنية

أو مركبة حسب نوع الجسمين المتقاطعين وسنذكر فيما يلى عدة أجسام تخترق بعضها مثنى فى أمثلة متنوعة

**مثال**

**المفروض** : المسقطان الرأسي والافقي لاسطوانتين متقاطعتين ا ، ب متساويتين فى القطر ومحوراهما متعامدين ومتقابلين شكل (٢٨٨)



شكل ( ٢٨٨ )

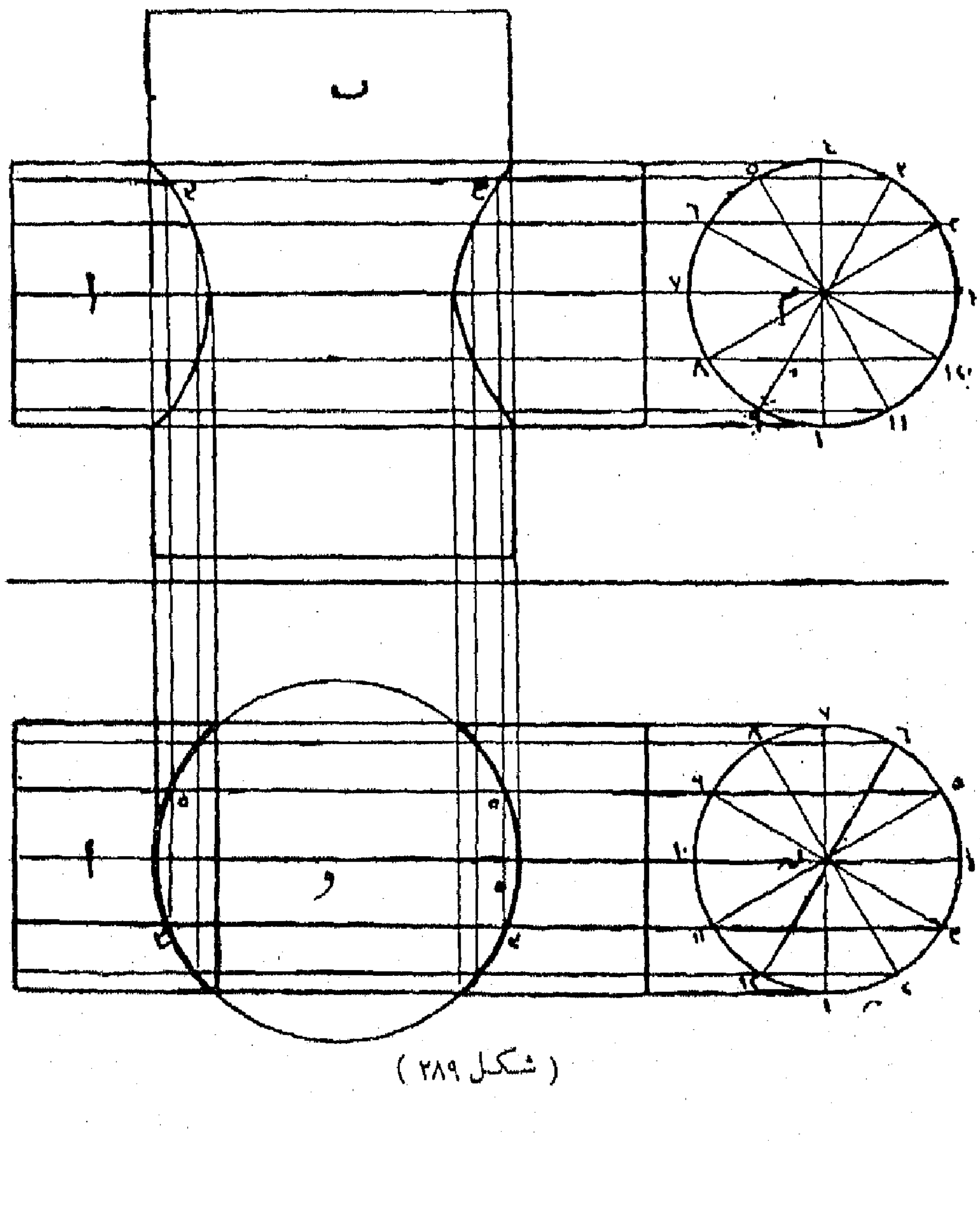
**والمطلوب** : اظهار خطوط تقاطع سطحى الاسطوانتين المذكورتين ببعضهما على مسقطيهما

**العمل** : نرسم الدائرة م وهى المسقط الجانبي للاسطوانة ا وكذا الدائرة ن وهى المسقط الافقي الجانبى للاسطوانة ا ونقسم كل من الدائرين الى عدة أقسام متساوية ولتكن اثنى عشر كما بالشكل ونسمى نقط التقاسيم من ١ الى ١٢ وهذه النقط الاثنى عشر تعتبر مساقط جانبية لعدة رواسم فى الاسطوانة ا

ثم نقطع الاسطوانتين بمستو ثالث عمودي على محور الاسطوانة ب وموازٍ لمحور الاسطوانة ا ونجعله يتحرك موازيا لنفسه اعلا واسفل محور الاسطوانة ا

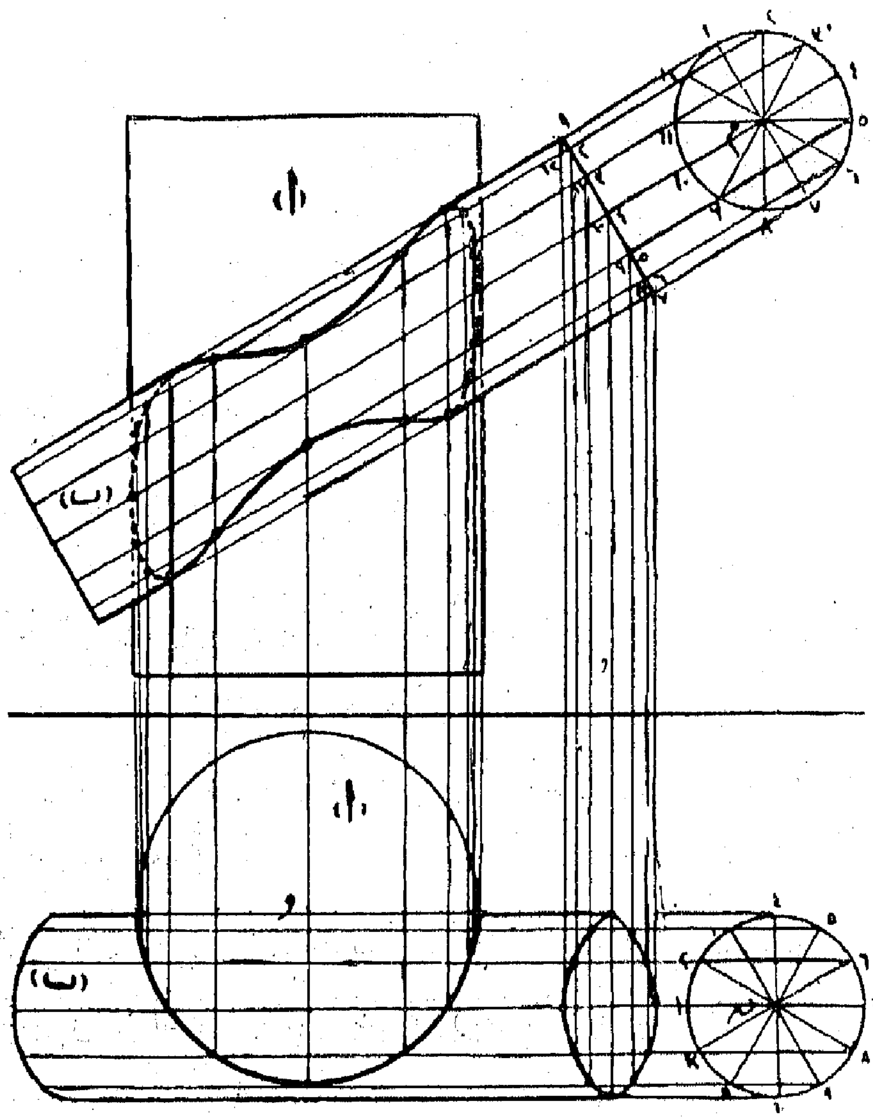
ففى كل وضع من اوضاعه يقطع الاسطوانة ب فى دائرة مسقطها الافقى هو الدائرة و ويقطع الاسطوانة ا فى راسمين يتوقف البعد بينهما على وضع المستوى القاطع بالنسبة لمحور الاسطوانة ا ويتغير هذا البعد من الصفر عندما يكون المستوى القاطع فى اعلا وضع له ( وعنده يمس الاسطوانة ا ) الى ان يصير مساويا لقطر الاسطوانة عندما يمر بمحورها

فاذا كان فى وضع بحيث يمر بالنقطتين ٣ و ٥ بالنسبة للدائرة م فانه يقطع الاسطوانة ا فى راسمين مسقطهما الرأسى هو امتداد الخط ٣ — ٥ ومسقطاهما الافقيين هما المستقيمان المرسومان من ٣ و ٥ على التوالى بالنسبة للدائرة ن وموازيان



( شكل ٢٨٩ )

لمحور الاسطوانة ا يقطعان الدائرة و فى المسقط الافقى فى أربع نقط تقع على المسقط الافقى لخطوط التقاطع يمكن ايجاد مساقطها الرأسية الواقعة على المسقطين الرأسيين للراسمين وهما على امتداد ٣ ، ٥ فى المسقط الرأسى وهكذا بتحرك المستوى القاطع يمكن ايجاد عدة نقط على خطوط التقاطع حتى يتكون تقاطع الاسطوانية ويجب الالتفات بنوع خاص فى هذه الحالة الى ثلاث مواضع للمستوى القاطع مهمة فى تكوين التقاطع وهى عند ما يمس الاسطوانة ا من أعلى ومن أسفل وعندما يمر بمحورها والموضعين الاولين يحددان نهاية خطوط التقاطع والموضع الثالث يحدد نقط تقابل خطوط التقاطع كما هو مبين فى الشكل

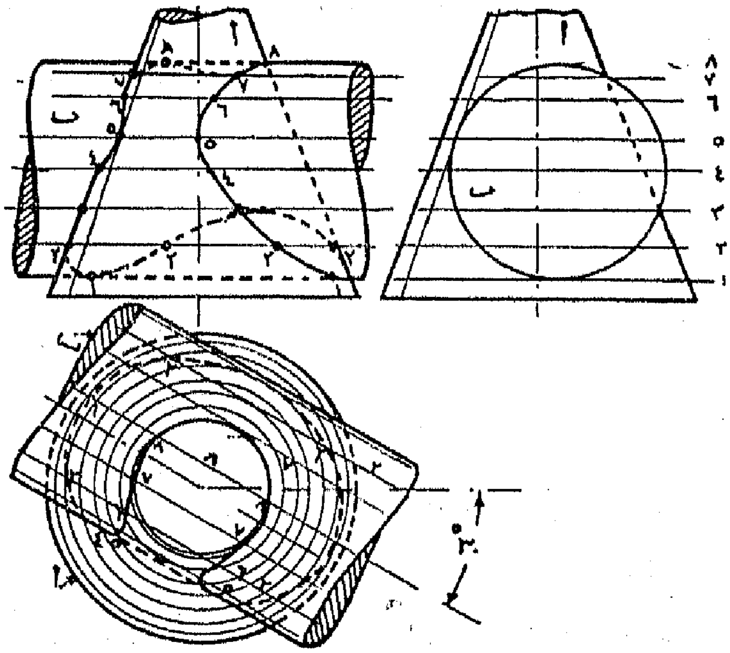


( شكل ٢٩٠ )

وشكل ( ٢٨٩ ) يبين طريقة ايجاد تقاطع اسطوانتين مختلفتين فى القطر ومحوراهما متعامدين

وشكل (٢٩٠) يبين تقاطع اسطوانتين مختلفتى القطر وماثلين ويلاحظ فى الاشكال الثلاثة السابقة ان يكون مركزا الدائرتين م و ن على امتداد محور الاسطوانة ا

وشكل ( ٢٩١ ) يبين تقاطع اسطوانة افقية بمخروط قائم غير ان محور

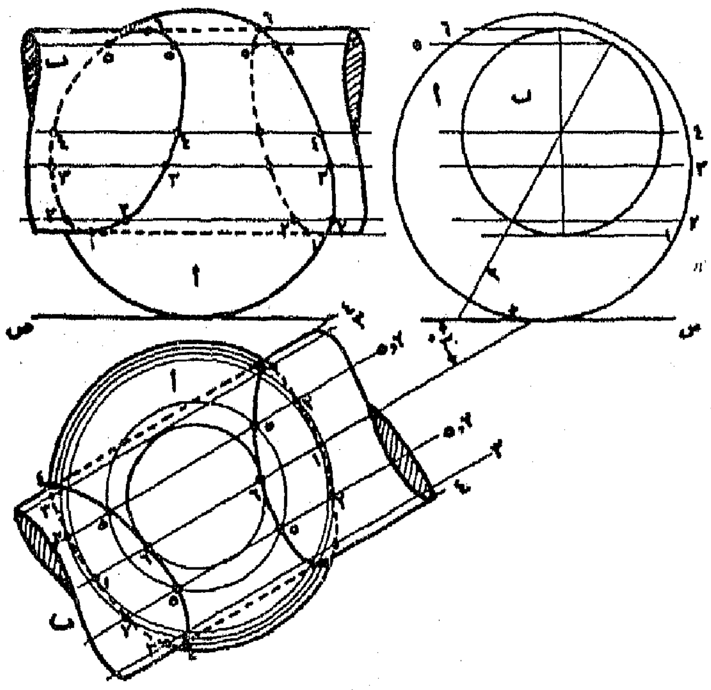


شكل (٢٩١)

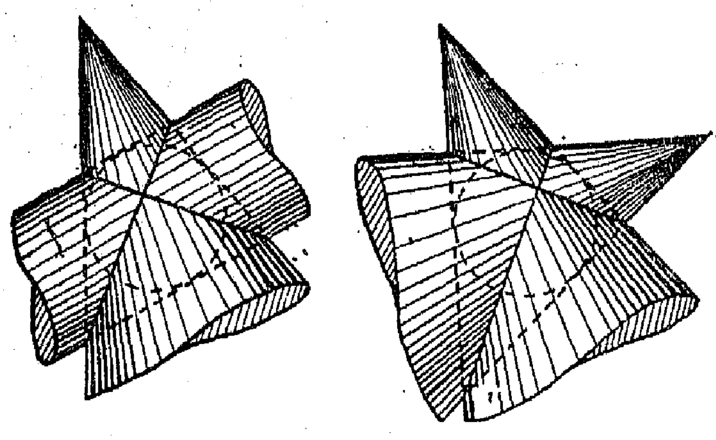
الاسطوانة لا يتقابل مع محور المخروط وقد استعملت نفس الطرق السابقة فقط أن مسقط قطاع المستوى القاطع مع المخروط يتكون من عدة دوائر تختلف اقطارها باختلاف موضع المستوى بالنسبة لمحور الاسطوانة وليس المقطع دائرة واحدة كما كان فى الحالات السابقة

وشكل (٢٩٢) يبين تقاطع اسطوانة بكره مختلفين فى القطر ولا يمر محور الاسطوانة بمركز الكرة بنفس الطريقة ويلاحظ هنا أيضا أن المستوى القاطع يقطع الكرة فى عدة دوائر مختلفة الاقطار

وكذلك يمكن إيجاد تقاطع مخروط بآخر كما هو واضح بالرسم (٢٩٣)



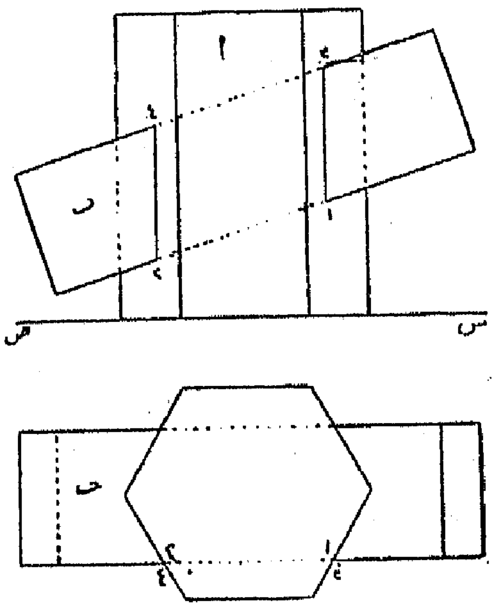
شكل (٢٩٢)



شكل (٢٩٣)

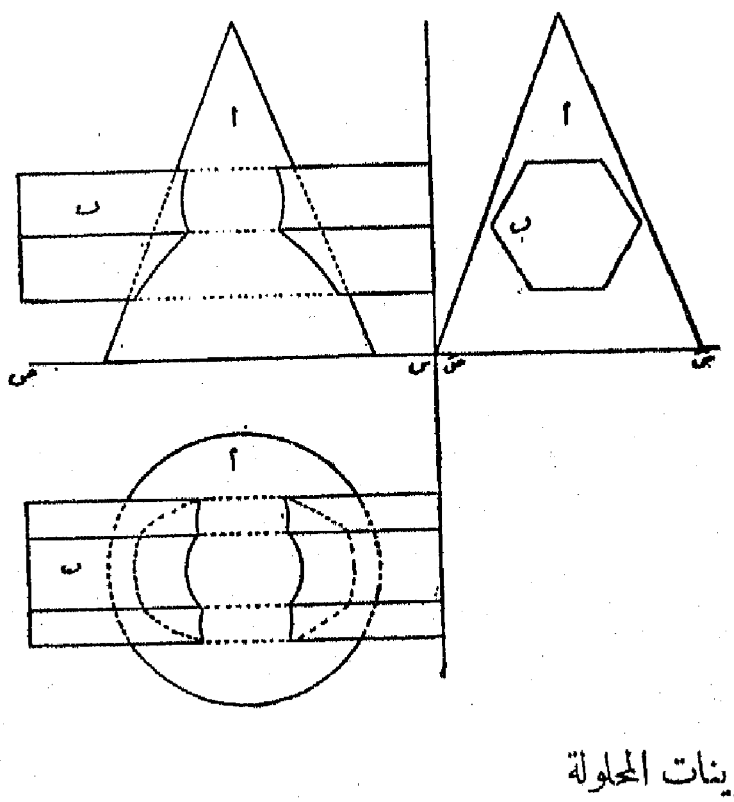
وشكل (٢٩٤) يبين تقاطع منشور رباعى مع آخر سداسى

وشكل (٢٩٥) يبين تقاطع منشور سداسى منتظم بمخروط قائم وهناك حالات أخرى لا يمكن حصرها ويمكن بواسطة الطريقة المشروحة فى أول الفصل إيجاد تقاطع أى سطحين بوجه عام .



شكل (٢٩٤)

تقاطع منشور رباعى
بآخر سداسى



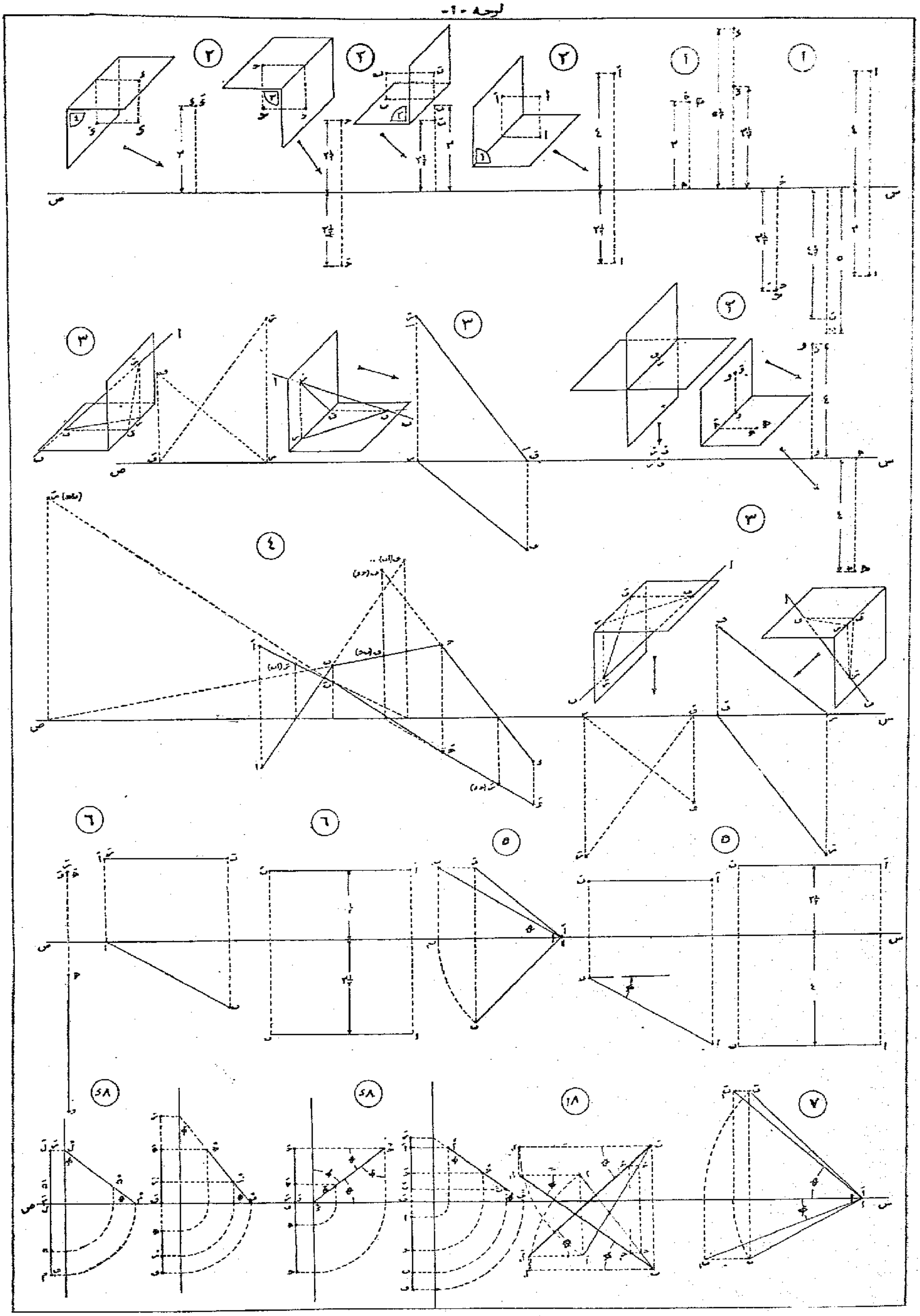
شكل ( ٢٩٥ )

تقاطع منشور سداسى
منتظم بمخروط قائم

ويلى ذلك لوح التمرينات المحلولة

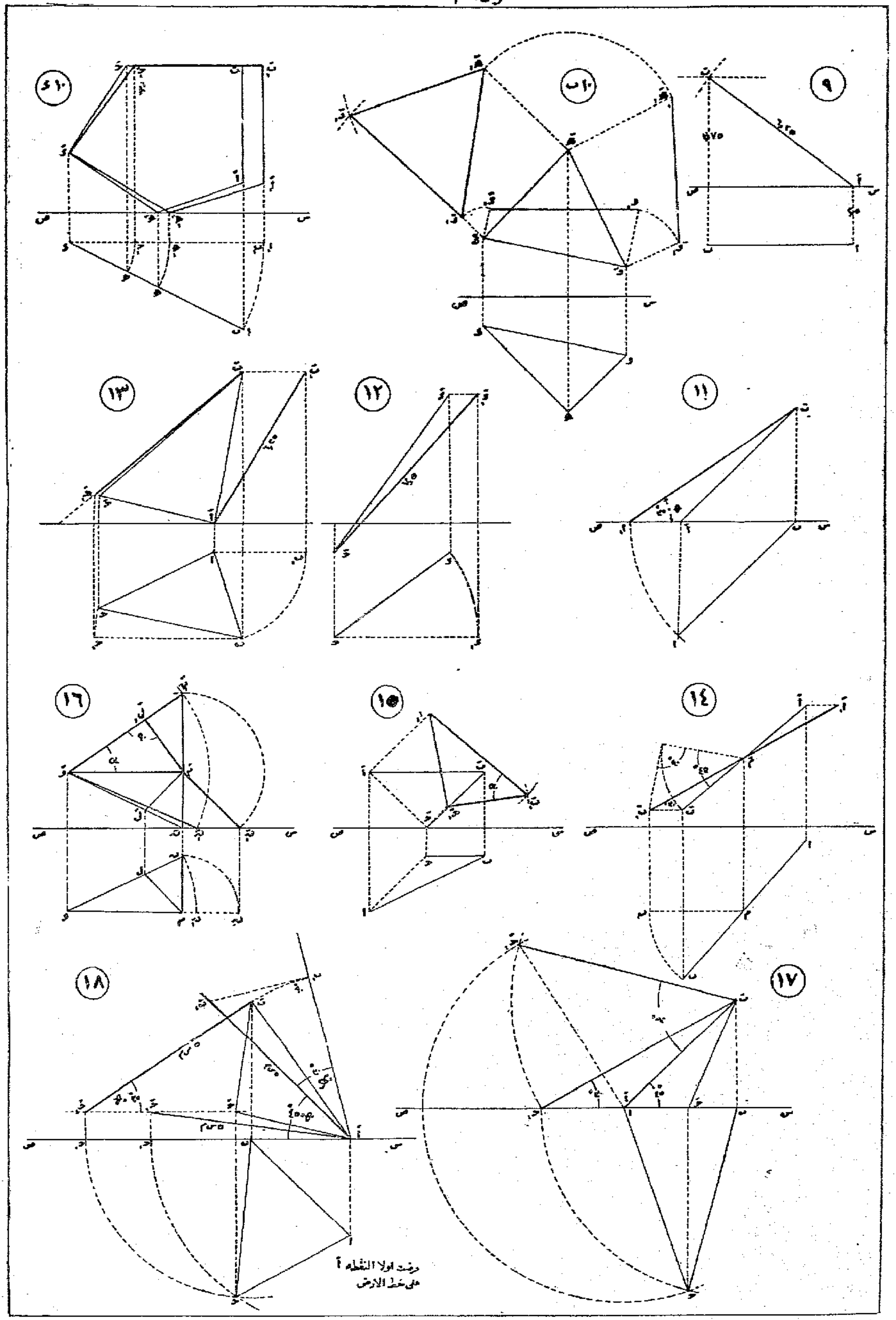
# تمرينـــات (١)

لوحة ١٠

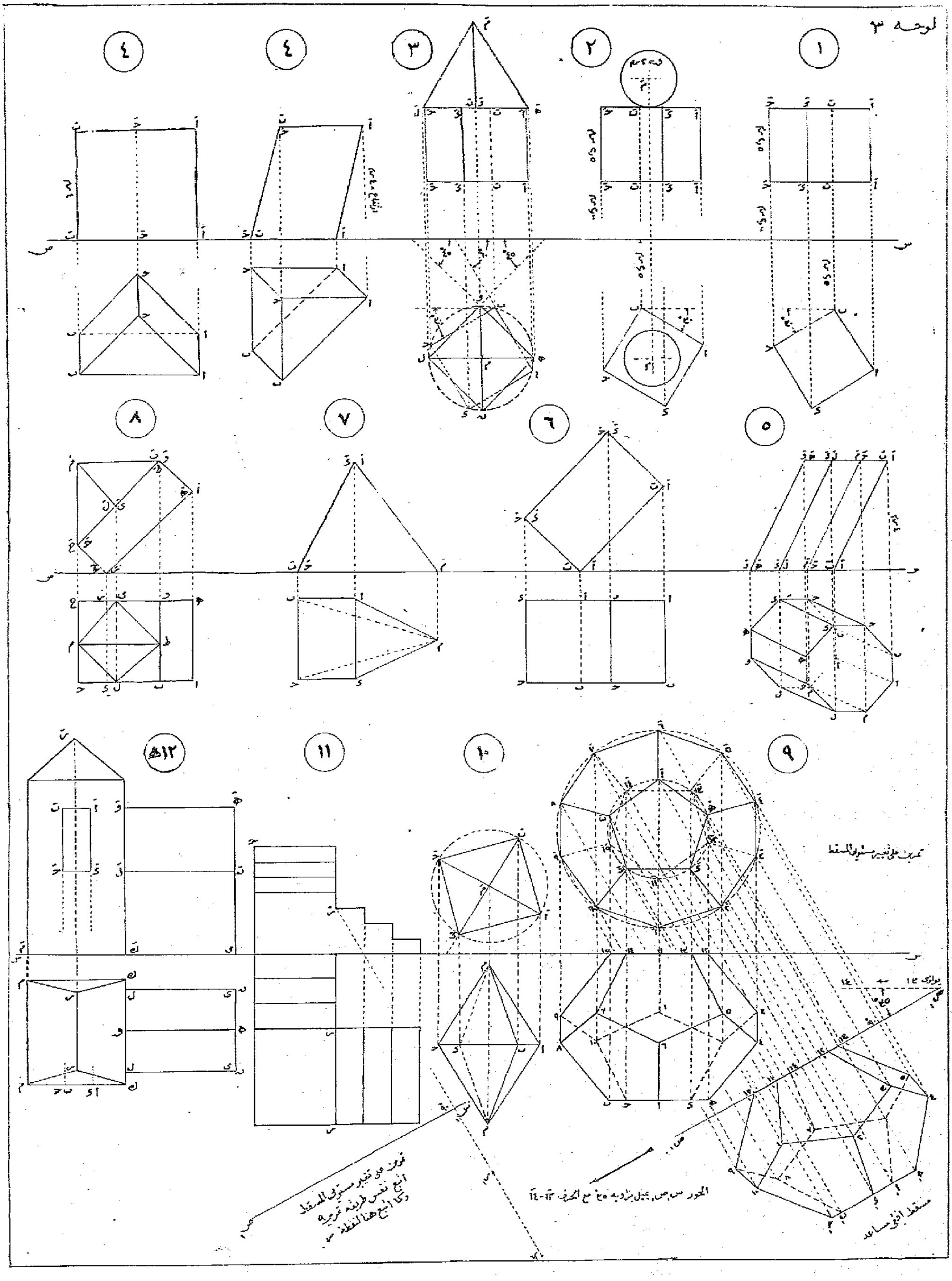


# تمرينـــــات (١)

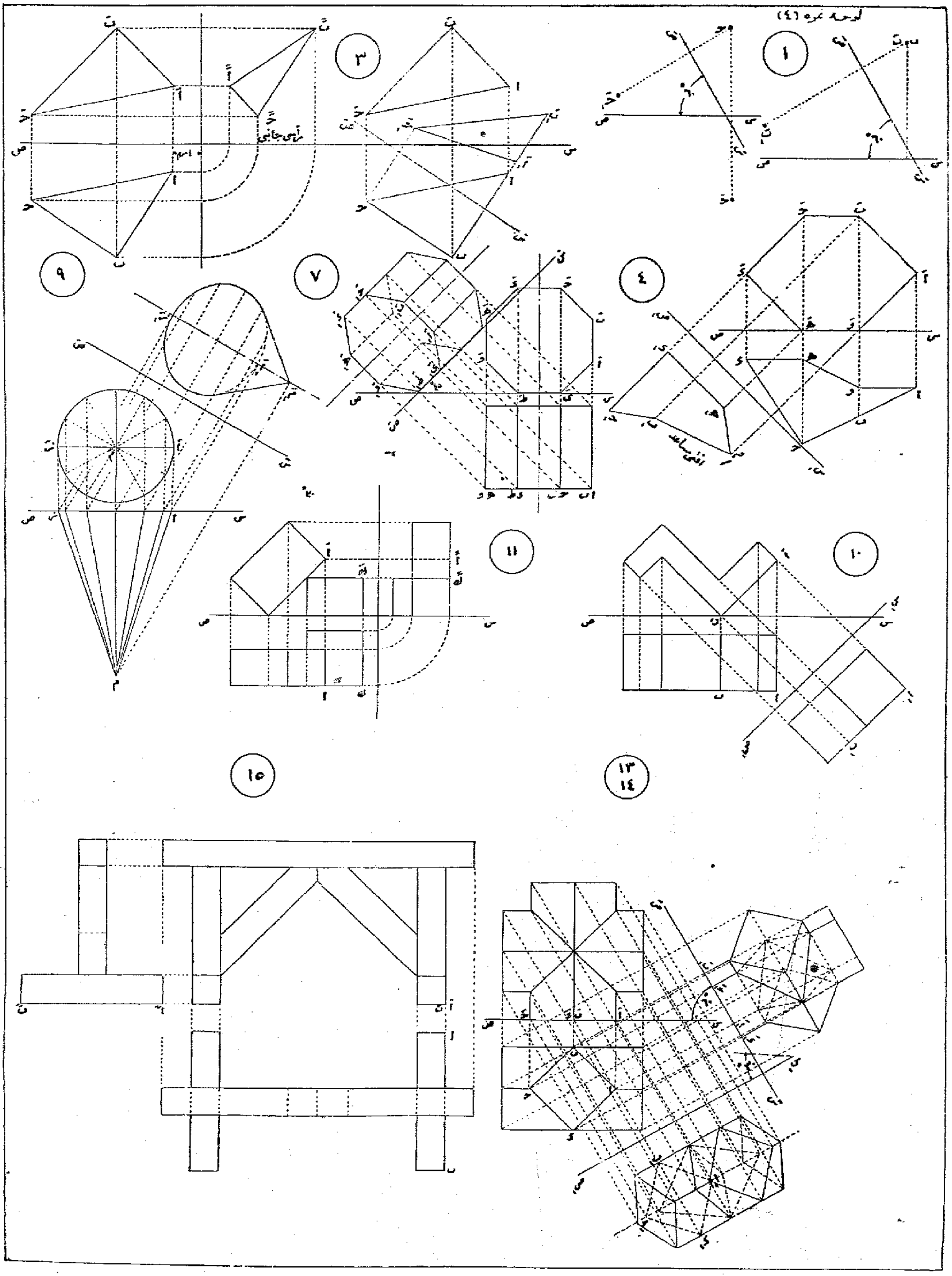
لوحة ٢



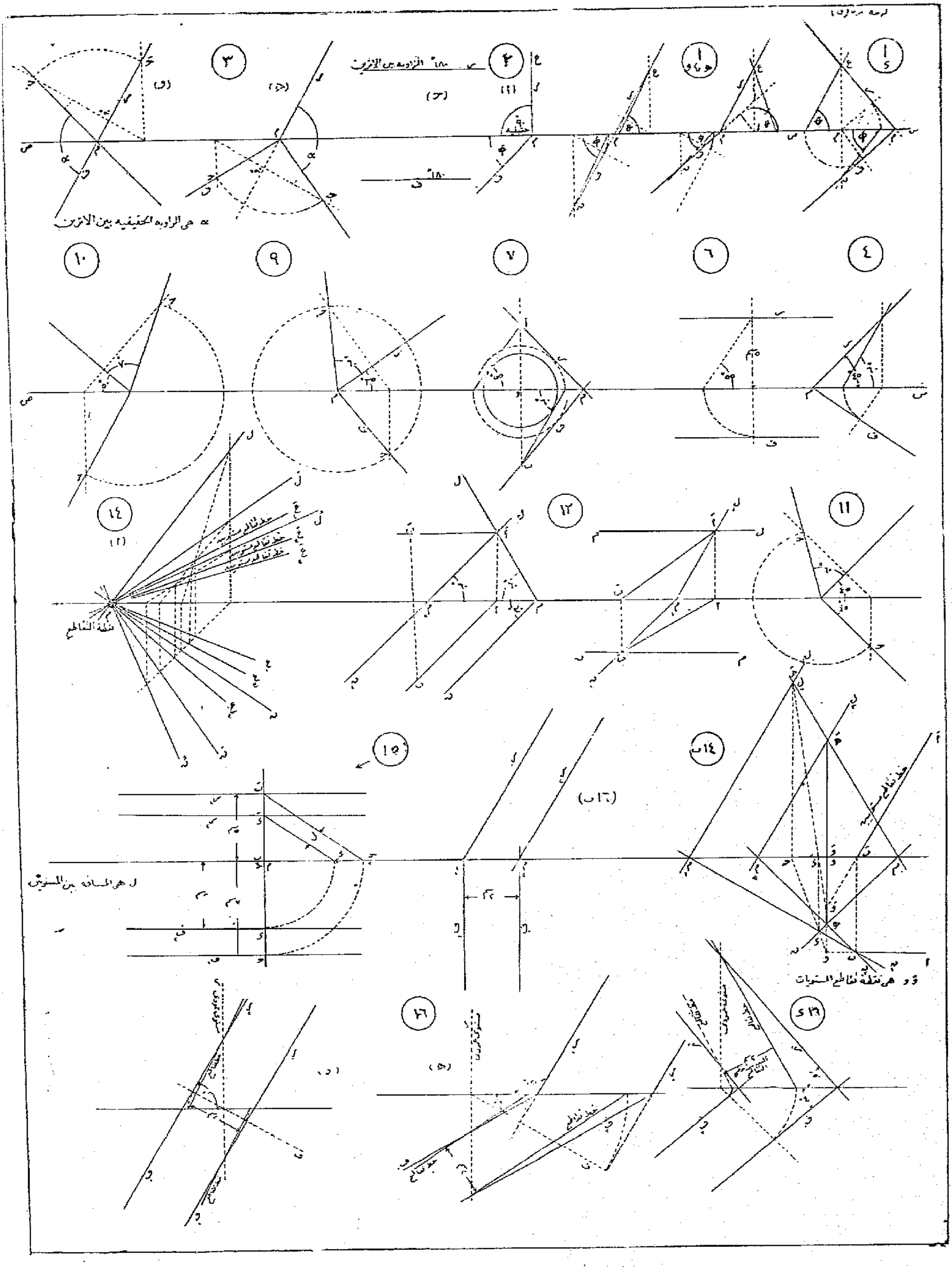
# تمرينـــات (٢)



# تمرینات (۳)



تمرينات ( ٤ )



α هي الزاويه الحقيقيه بين الاثرين
ل هي المسافه بين المستويين
ق و هي نقطة تقاطع المستويات
نقطة التلاقي